Das Verhältnis von Begriffs- und Urteilslogik

Eine Untersuchung verschiedener Logikkalküle
mit einem Exkurs über die Antinomien und
den Intuitionismus

Dissertation
zur Erlangung des Grades eines
Doktors der Philosophie
der Eberhard-Karls-Universität zu Tübingen

dem Fachbereich Philosophie vorgelegt

von
Johann-Michael v. Petzinger
aus
Berlin

1975

Gedruckt mit Genehmigung des Fachbereichs Philosophie
der Universität Tübingen

Hauptberichterstatter: Professor Dr. Bruno Baron v. Freytag-Löringhoff
Mitberichterstatter: Professor Dr. Walter Gölz
Dekan: Professor Dr. Johannes Schwartländer

Beschluß der erweiterten Fachbereichskonferenz vom 21. April 1975

Fotoschnelldruck – Hans-Joachim Köhler – 74 Tübingen

Vorwort

Die vorliegende Arbeit entstand in den Jahren 1972 bis 1974. Manches davon kann man heute einfacher sagen, manches einfacher beweisen. Die Arbeit entfernt sich in verschiedener Hinsicht, was ihren Ansatz, dessen Durchführung und schließlich die daran geknüpften Konsequenzen und Vermutungen betrifft, von der im Augenblick herrschenden logischen Tradition. Vieles mag daher auf den ersten Blick merkwürdig, ja ungereimt erscheinen.

Der Leser wird deshalb gebeten, grundsätzliche Bedenken möglichst bis zu einer gründlichen Lektüre der gesamten Arbeit zurückstellen zu wollen.

Der Verfasser dankt Herrn Professor Walter Felscher, Ordinarius für Mathematische Logik an der Universität Tübingen, für die liebenswürdige Überlassung eines nichtveröffentlichten Manuskripts, das sich in seiner Weise mit einigen der im folgenden behandelten Probleme beschäftigt, sowie Herrn Paul Hermann Zieschang für wichtige Hinweise, insbesondere im Zusammenhang mit Kapitel VI, §2.

Durch die vorliegende Arbeit ist Petzinger (1) als überholt, teils präzisiert, teils korrigiert zu betrachten.

Tübingen, im Juni 1975 Johann-Michael v. Petzinger

Dem Andenken meines Vaters

Johann-Dietrich v. Petzinger (1910-1974)

gewidmet

I n h a l t s v e r z e i c h n i s

I. Einleitung

Die Autoren heute gängiger Logiklehrbücher scheinen sich trotz bisweilen erheblicher Unterschiede u. a. in der Form der Darstellung und der Art der herangezogenen Hilfsmittel wenigstens darüber einig zu sein, daß die Logik als Theorie des Schließens zunächst von Urteilen oder Aussagen zu handeln habe und erst dann von Begriffen oder Prädikaten. Logik beginnt also mit einem ersten, ganz elementaren Teil, der sog. Aussagenlogik, und schreitet fort mit der sog. Prädikatenlogik, die sich auf erstere gründet. So lesen wir bei v. Kutschera (2), S. 17: "Die einfachste logische Theorie ist die Aussagenlogik." Andererseits heißt es in demselben Buche auf S. 9: "In der philosophischen Tradition umfaßt die formale Logik eine Lehre vom Begriff, eine Lehre vom Urteil und eine Lehre vom Schluß. Die Entwicklung einer Lehre vom Schließen setzt aber eine Analyse der Urteile schon voraus, denn ein Schluß ist ein Schluß von gewissen Urteilen auf ein anderes Urteil. Und da die Urteile mit Begriffen gebildet werden, muß einer Analyse der Urteile eine Analyse der Begriffe vorausgehen." Hier ist nun die Reihenfolge gerade umgekehrt: Zunächst wird der Begriff, dann das Urteil behandelt. Demnach müßte im Sinne der traditionellen Auffassung, die sich von Aristoteles über die Scholastik, Leibniz [1] u. a. bis hin zu v. Freytag-Löringhoff verfolgen läßt, die Theorie der Begriffe als elementarer und grundlegender der Theorie der Urteile vorangehen.

Eine solche Logik, die in ihrem Aufbau vom Begriff zum Urteil fortschreitet, wollen wir Begriffslogik nennen. Als unanaly-

sierte Grundelemente, kleinste Einheiten, betrachtet sie die Begriffe und handelt demnach zunächst von deren Beziehungen und Verknüpfungen. Im Gegensatz dazu heiße eine Logik, die wie die heute das Feld beherrschende Aussagen- und Prädikatenlogik nach Freges Vorgang beim Urteil ansetzt, Urteilslogik. Unanalysiertes Grundelement ist hier das Urteil. Eine solche Logik handelt von Beziehungen und Verknüpfungen von Urteilen und schreitet von dort zur Behandlung von Begriffen fort.
"Urteil" möge hier in einem weiten Sinne gefaßt werden und alles bezeichnen, was behauptet oder bestritten werden kann. Darauf allein kommt es für die Logik an. In diesem Sinne wären also auch beliebige Annahmen, insbesondere mathematische Axiome, Urteile.
Ein Urteil im engeren und philosophisch üblichen Sinne dagegen setzt einen beurteilten ontologischen oder logischen Sachverhalt, (Ansich-)Bestand, voraus. Axiome einer rein mathematischen Theorie wären in diesem zweiten Sinne keine Urteile, da sie sich nicht auf einen vorgegebenen Sachverhalt beziehen, sondern einen solchen kraft ihrer Setzung gewissermaßen erst erzeugen. Urteile im engeren Sinne können wahr oder unwahr sein, rein mathematische Axiome nicht. Urteilslogik braucht jedoch nicht von "wahr" oder "unwahr" im vollen Sinne dieser Wörter, sondern sozusagen nur von "ja" und "nein" zu handeln [2].
Wenn man bedenkt, daß der Schluß als Gegenstand der Logik zunächst in Urteile zerlegt werden kann, die dann weiter u. a. in Begriffe zerfallen, so wird man ganz zwangsläufig auf die beiden eben erwähnten Logikansätze geführt [3].

Die Namen "Urteilslogik", "Begriffslogik" sind nicht dahin

mißzuverstehen, als könne die eine nur Urteile, die andere nur Begriffe behandeln. Vielmehr treten in der Begriffslogik auch Urteile auf, und zwar, ihres Behauptungscharakters beraubt, als spezielle Begriffe. Entsprechend kann die Urteilslogik auch Begriffsverhältnisse darstellen, indem sie Begriffe als besondere zweiwertige Funktionen auftreten läßt. Beide Ansätze wollen also in ihrer Weise jeweils die "ganze" Logik erfassen. Die Urteilslogik stützt sich jedoch auf den für Urteile typischen Behauptungscharakter, im Falle der sog. klassischen Urteilslogik also auf die Tatsache, daß Urteile genau zwei Werte annehmen können. Frege gründete wohl als Erster die Logik konsequent eben darauf [4].

Einem gründlichen Vergleich von Begriffs- und Urteilslogik und damit einer befriedigenden Antwort auf die Frage nach dem genauen Verhältnis dieser beiden Logikansätze stand bisher die Ansicht entgegen, Begriffslogik sei für die Anwendung, speziell in der Mathematik, unzureichend, da sie nicht wesentlich über die aristotelische Syllogistik hinausgehe. Tatsächlich bildet diese aber nur einen kleinen, wenn auch nicht unwichtigen Teil des begriffslogischen Gesamtsystems, da sie lediglich etwas über den Umgang mit Begriffsbeziehungen lehrt, das Feld der Begriffsverknüpfungen aber nicht bearbeitet.
Der größte Teil der vorliegenden Arbeit widmet sich der Untersuchung des Verhältnisses von in gewisser Weise voll entwickelter Begriffslogik und Urteilslogik. Im Anschluß an v. Freytag-Löringhoffs Weiterentwicklung der aristotelischen Logik wird im folgenden gezeigt werden, wie man, ausgehend von der sog. Reinen Begriffslogik, durch Hinzunahme von einfachen, plausiblen Operationsregeln die Begriffe zu Urteilen

und so die Begriffslogik zur Urteilslogik spezialisieren kann, so daß eine Äquivalenz mit der Aussagen- und Prädikatenlogik erreicht wird.
Auf ähnliche Weise läßt sich die Reine Begriffslogik auch in verschiedene andere Richtungen spezialisieren. So führen zB. gewisse Voraussetzungen, die man über Individuen macht, zur sog. Angewandten Begriffslogik, die in enger Beziehung zur Mengenlehre steht.

Überall dort, wo man gern möglichst voraussetzungsarm arbeitet, wie etwa in der Philosophie oder der mathematischen Grundlagenforschung, wird man begriffslogischer Betrachtungsweise ihrer größeren Allgemeinheit wegen zunächst den Vorzug geben. Dabei geht nichts verloren, da man je nach Bedarf stärkere Hilfsmittel, zB. urteilslogische, heranziehen kann. Andererseits ist dadurch die Möglichkeit gewonnen, in Argumentationen genau diejenigen Stellen zu bezeichnen, an denen speziellere Schlußweisen verwendet werden. Auf diese Weise gelingt es, manches an bekannten Problemen klarer zu machen, so insbesondere im Zusammenhang mit den Antinomien und der Tertium-non-datur-Kritik der Intuitionisten. Andeutungen darüber finden sich im Kapitel VI.

Wir setzen voraus, daß unsere Logiksysteme durch Kalküle repräsentiert werden, und streben an, nach Möglichkeit alle unsere Behauptungen durch Kalkülableitungen, also rein mechanische, endliche Manipulationen mit Zeichen, zu begründen. Hierbei wird es oft darum gehen, Kalküle ineinander zu übersetzen und sie bezüglich ihrer logischen Stärke zu vergleichen.

Aus didaktischen Gründen geben wir in Kapitel III zwei äquivalente, jedoch syntaktisch sehr verschiedene Kalküle für die Begriffslogik an, einen mehrdimensionalen nach v. Freytag-Löringhoff und einen linearen nach Schröder. Zur Darstellung der Urteilslogik in Kapitel IV verwenden wir einen auf Lukasiewicz zurückgehenden Kalkül. In Kapitel V werden dann auf dieser Grundlage die Beziehungen von Begriffs- und Urteilslogik behandelt. Zu den Kalkülen wäre jeweils viel mehr zu sagen, sie werden jedoch meist nur so weit dargestellt, wie es für die Behandlung unserer Probleme nötig erscheint.

Da ein zirkelfreier Aufbau der Logik weder Logik selbst, noch irgendeine andere Theorie voraussetzen darf, wollen wir insbesondere von typisch mathematischen <u>Lehrsätzen</u> möglichst keinen Gebrauch machen. Andernfalls könnte die Logik die ihr zugedachten Grundlegungsaufgaben nicht erfüllen. Sie würde sich dann auf in noch höherem Maße Begründungsbedürftiges stützen. Das hindert jedoch nicht, aus Gründen einfacherer Ausdrucksweise gelegentlich mathematische <u>Begriffe</u> zu verwenden, zumal den von uns behandelten Kalkülen bekannte Strukturen der Verbandstheorie, insbesondere der Theorie der Booleschen Verbände, entsprechen.

II. Technische Vorbemerkungen

Wir setzen Vertrautheit mit den üblichen aussagen- und prädikatenlogischen Formalismen sowie elementare Kenntnisse aus der Verbands- und Graphentheorie voraus, wollen hier jedoch einige wichtige Punkte rekapitulieren.

Zu einer formalen Sprache gehören

1. ein Vorrat von Buchstaben, das sog. Alphabet,
2. ein Vorrat von Grundzeichen (und eventuell Hilfszeichen),
3. eine Formeldefinition, die festlegt, welche Zeichenkombinationen als Formeln anzusehen sind.

Formeln können ein- und mehrdimensionale Gestalt haben.

Ein Kalkül (Formalismus) besteht aus

1. einer formalen Sprache, bei der gewisse Formeln als Grundformeln ausgezeichnet sind;
2. Grundregeln, die es gestatten, aus vorgegebenen Formeln neue zu gewinnen (abzuleiten).

Bei linearen Kalkülen notieren wir Grundregeln so:

$$\frac{A_1, \ldots, A_n}{B}\ (K) \quad \text{bzw.} \quad A_1, \ldots, A_n \underset{(K)}{\vdash} B$$

Zu lesen: Aus den Formeln $A_1, \ldots, A_n$ ist die Formel B (im Kalkül K) ableitbar.

Unter einer Ableitung (Herleitung, Beweis) in einem Kalkül K verstehen wir eine endliche Folge von Formeln $G_1, \ldots, G_m$, bei der jedes G_i

1. Grund- oder ableitbare Formel oder
2. Annahmeformel (Hypothese) oder

3. aus Formeln G_k mit $k < i$ durch Anwendung von Grund- oder ableitbaren Regeln gewonnen ist.

G_m heißt Endformel der Herleitung.

Eine Formel B heißt im Kalkül K ableitbar (herleitbar, beweisbar), wenn sie Endformel einer Herleitung ist, die keine Hypothesen enthält. In Zeichen: $\underset{(K)}{\vdash}$ B bei linearen Kalkülen.

Eine Regel mit den Prämissen $A_1, \ldots, A_n$ und der Konklusion B heißt im Kalkül K ableitbar (herleitbar, beweisbar), wenn B Endformel einer Herleitung ist, die genau die Formeln $A_1, \ldots, A_n$ als Hypothesen enthält. Wir sagen auch, B sei aus $A_1, \ldots, A_n$ hypothetisch ableitbar.

In Zeichen: $A_1, \ldots, A_n \vdash B$ bei linearen Kalkülen.

Grundformeln und -Regeln bezeichnen wir auch als Axiome oder Postulate. Ableitbare Formeln und Regeln, die keine Axiome sind, heißen Theoreme oder Sätze.

Ein Kalkül K_1 heißt spezieller (stärker) als ein Kalkül K_2 bzw. K_2 heißt allgemeiner (schwächer) als K_1 (in Zeichen: $K_1 \leqq K_2$ oder $K_1 \longrightarrow\!\!< K_2$), wenn gilt:

Zu jeder in K_2 ableitbaren Formel A gibt es eine Übersetzung A', die in K_1 ableitbar ist.

Das ist insbesondere dann der Fall, wenn jede Grundformel und jede Grundregel von K_2 eine in K_1 ableitbare Übersetzung besitzt. Dabei müssen verschiedene Formeln mit derselben Übersetzung auseinander ableitbar sein, ebenso verschiedene Übersetzungen derselben Formel.

Daß jede in K_2 bildbare Formel eine K_1-Formel als Übersetzung besitzt, ist nicht vorausgesetzt (vgl. S. 34).

Gilt $K_1 \leqq K_2$, so heißen K_1 und K_2 äquivalent, falls auch noch $K_2 \leqq K_1$ gilt. Gibt es dagegen eine in K_1 ableitbare Formel, die keine in K_2 ableitbare Übersetzung besitzt, so heißt K_1 echt spezieller als K_2 bzw. K_2 echt allgemeiner als K_1.

III. Begriffslogik

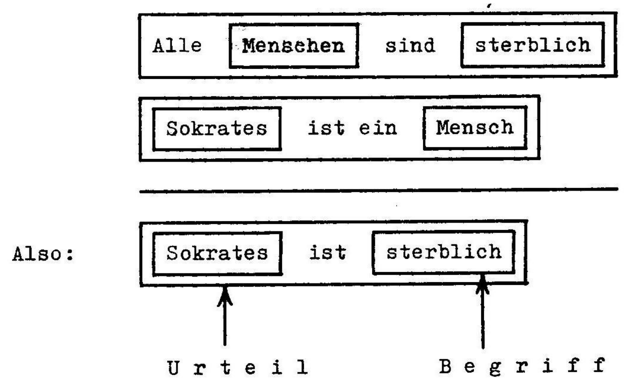
§ 1 Übersicht

Das Gesamtsystem der Logik kann grundsätzlich auf zwei Weisen angesetzt werden, einmal als Theorie der Begriffe (Begriffslogik), zum anderen als Theorie der Urteile (Urteilslogik). Wir geben hier zunächst zwei begriffslogische Formalismen an, einen mehrdimensionalen BFF und einen linearen BGS, und beweisen deren Äquivalenz sowie die Tatsache, daß beide eine Boolesche Algebra beschreiben.
Anschließend werden einige für spätere Überlegungen - insbesondere den Vergleich mit der Urteilslogik - wichtige Spezialisierungen dieser Kalküle betrachtet.

§ 2 Allgemeine Betrachtung über verschiedene Logikansätze

Im Sinne eines intuitiven Vorverständnisses kann man Logik ansehen als die Lehre von den allgemeinen Formen der Argumentation oder kurz als <u>Lehre vom Schließen</u>.
Schlüsse als Gegenstände der Logik bauen sich aus einzelnen <u>Urteilen</u> auf, und diese wiederum bestehen u. a. aus <u>Begriffen</u>.
Was das bedeutet, zeigt Abbildung 1.
Hier ist graphisch angedeutet, wie sich der Schluß "Alle Menschen sind sterblich. Sokrates ist ein Mensch. Also ist Sokrates sterblich." zunächst in Urteile und dann weiter in

<u>Abb. 1</u> Der Aufbau eines Schlusses aus Urteilen und Begriffen



Bemerkung: "Mensch", "sterblich(es)" sind <u>Allgemein</u>begriffe, "Sokrates" ist <u>Individual</u>begriff. Es können auch Relationsbegriffe auftreten wie "Vater von", "größer als" etc.

<u>Abb. 2</u> L o g i k = Lehre vom Schließen

U r t e i l s - Logik	B e g r i f f s - Logik
handelt von Urteilen, sowie deren Beziehungen und Verknüpfungen (Operationen)	handelt von Begriffen, sowie deren Beziehungen und Verknüpfungen (Operationen)

die darin enthaltenen Begriffe zerlegen läßt.
Hinsichtlich dieser Zerlegung von Schlüssen in Urteile und weiter in Begriffe gibt es genau zwei Logiktypen: Urteilslogik und Begriffslogik.[5)]
Ähnlich wie zB. die Arithmetik von Zahlen und deren Beziehungen sowie Verknüpfungen handelt, hat es Urteilslogik mit Beziehungen und Verknüpfungen von Urteilen, Begriffslogik mit Beziehungen und Verknüpfungen von Begriffen zu tun. Einmal bilden Urteile das Ausgangsmaterial, das andere Mal Begriffe. Etwas lasch ausgedrückt: Logik kann als Begriffs- oder als Urteils-"Rechnung" aufgezogen werden (vgl. Abb. 2).
Die Namen Urteilslogik, Begriffslogik sind nicht dahin mißzuverstehen, als könne die eine <u>nur</u> Urteile, die andere <u>nur</u> Begriffe behandeln: Also zwei abgegrenzte Teilgebiete der <u>einen</u> Logik.
Vielmehr treten in der Begriffslogik auch Urteile auf, und zwar als spezielle Begriffe, sog. Beziehungsbegriffe. Analog kennt die Urteilslogik auch Begriffe, nämlich in Gestalt der sog. Satzfunktionen (vgl. § 5.1 und Kap. IV, § 3.2).
Die Urteilslogik stützt sich jedoch auf den typischen Wahrheitsanspruch oder allgemeiner: Behauptungscharakter der Urteile, also die Tatsache, daß diese genau zwei Werte annehmen können. Diese Eigenschaft der Urteile zur Grundlage der gesamten Logik zu machen, war wohl Freges Idee.

Es drängt sich nun die allgemeine Frage auf, in welcher genauen Beziehung voll entwickelte Begriffslogik und Urteilslogik stehen.
Was haben sie - wenn überhaupt - gemeinsam?
Worin unterscheiden sie sich?

Die folgenden Untersuchungen bis einschließlich zum Kapitel V dienen hauptsächlich dem Zweck, das Verhältnis von Begriffs- und Urteilslogik im einzelnen zu klären.

Auf den ersten Blick sind Urteil und Begriff derart verschieden, daß ein Vergleich fruchtlos erscheint.
Wenn man jedoch beide Logikansätze in formalisierter Gestalt einander gegenüberstellt, dann lassen Gemeinsamkeiten und Unterschiede sich genau angeben.
Für die im folgenden zu behandelnde Begriffslogik werden wir zwei äußerlich recht verschiedene Formalismen zur Verfügung stellen: Einen mehrdimensionalen und einen linearen.
Ersterer verbindet große Anschaulichkeit bei einfachen Zusammenhängen mit einer gewissen Zwangsläufigkeit der Beweisführung, während letzterer diese Vorzüge nicht besitzt, sich jedoch in komplizierteren Fällen als handlicher erweist. Nach dem Beweis der Äquivalenz beider Kalküle werden wir je nach Erfordernis den jeweils geeigneteren als Darstellungsmittel verwenden.

Wichtigstes Ergebnis dieses Kapitels wird sein:
Mit Begriffen kann man nach bestimmten Gesetzen "rechnen". Sie bilden einen sog. <u>Booleschen Verband</u> bzw. eine <u>Boolesche Algebra</u>. Später werden wir sehen, daß darin Begriffs- und Urteilslogik übereinstimmen. Die Gemeinsamkeiten gehen sogar noch etwas weiter. Die Differenz besteht in gewissen "Rechenregeln", denen zwar Urteile, nicht aber Begriffe unterliegen.

§ 3.1 Begriffslogik in mehrdimensionaler Darstellung – Der Kalkül BFF

Unser erster Formalismus geht auf v. Freytag-Löringhoff zurück. Wir wollen ihn daher kurz BFF nennen (dh. Begriffslogik – v. Freytagsche Form – v. Freytagsche Axiomatisierung).
Wir zählen zunächst die Zeichen des Kalküls auf und erklären, wie man aus ihnen Formeln bildet, geben dann die begriffslogische Bedeutung der Zeichen an und stellen schließlich die Grundformeln und Grundregeln des Kalküls zusammen.
Wir begnügen uns hier mit einer knappen Skizze und verweisen für weitere Einzelheiten auf die einschlägige Literatur.[6]

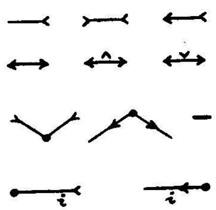
B F F   Begriffslogik – v. Freytagsche Form
         v. Freytagsche Axiome

<u>Alphabet:</u>

	a, b, c ... A, B, C ...	Begriffs<u>variablen</u>, die beliebig indiziert oder mit Exponenten versehen werden dürfen.
	M, W	Begriffs<u>konstanten</u>

Das Alphabet darf durch beliebige Zeichen erweitert werden.

<u>Grundzeichen:</u>



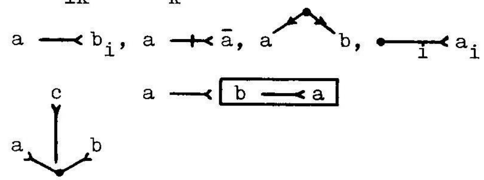
Beziehungszeichen

Verknüpfungszeichen (Operationszeichen)

<u>Formeln</u> sind

1. eventuell mit Indizes oder Exponenten versehene <u>Buchstaben</u> des Alphabets, die auch beliebig oft überstrichen sein dürfen.
2. Figuren, deren Kanten aus Beziehungszeichen, mit einem Querstrich versehenen Beziehungszeichen oder aus Verknüpfungszeichen gebildet sind, sog. <u>Graphen</u>.[7]
   Als Ecken treten auf:
   Formeln gemäß 1.;
   Punkte (•) von Verknüpfungszeichen, die beliebig oft überstrichen sein dürfen;
   umrandete Formeln der Gestalt xBy, wobei B ein eventuell quergestrichenes Beziehungszeichen ist, und beliebig oft überstrichene Formeln dieser Art (Umrandung entspricht etwa den Klammern bei anderen Kalkülen).

Beispiele für Formeln: a, b_{ik}, $\bar{\bar{A}}$, $\bar{B}_k$, c^I



Diese Formeldefinition ist für den Kalkül BFF selbst ein wenig zu weit, da einige Formelarten in BFF-Herleitungen gar nicht auftreten. Sie wurde jedoch mit Rücksicht auf spätere Spezialisierungen des Kalküls so umfassend gewählt.

Die Zeichen des Kalküls BFF können folgendermaßen begriffslogisch gedeutet werden:

 <u>Art-Gattungsverhältnis</u> von a und b;

a ist die (speziellere) Art, b die (allgemeinere) Gattung. Auch zu lesen als: "a liegt unter b" bzw. "b liegt über a" oder: "Alle a sind b".

(Totale) Identität von a und b: a ist Art von b und b ist Art von a.

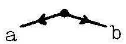
a ist Art von b, b ist jedoch nicht Art von a.
Beispiel: Hund  Lebewesen

Diversität, Unverträglichkeit von a und b. Auch zu lesen als: "Kein a ist b", "Alle a sind nicht b".

Total-Diversität von a und b: a und b sind divers und bilden eine vollständige Alternative.

Diversität, jedoch keine vollständige Alternative zwischen a und b.
Beispiel: Hund  Katze

Der Punkt (•) bezeichnet das Spezifikat von a und b, den Begriff "a und b", bzw. das Spezifikat aller Begriffe a_i.



Der Punkt bezeichnet das Generalisat von a und b, den Begriff "a oder b", bzw. das Generalisat aller Begriffe a_i.

$\bar{a}$ Nicht-a, das Negat von a.

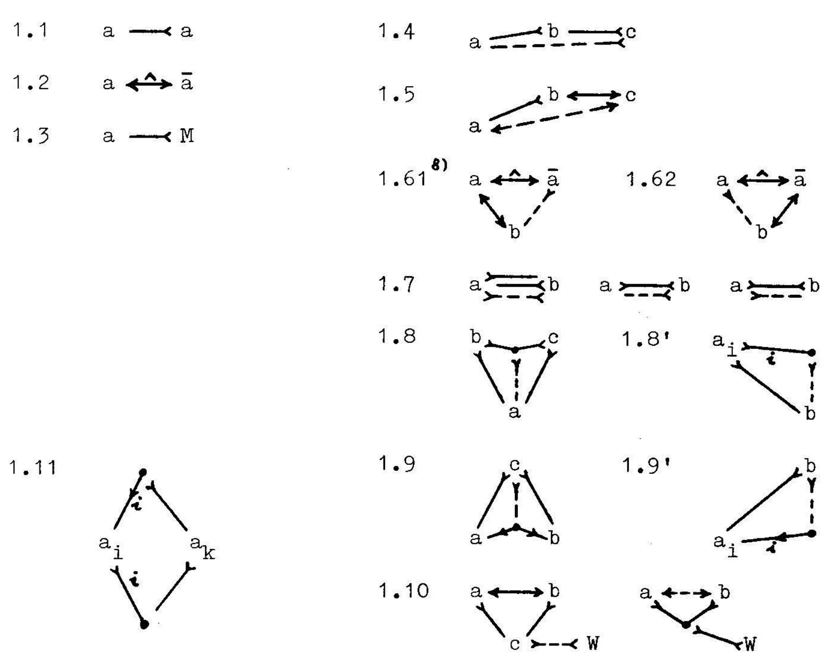
M Der Begriff "Meinbar(es)", die oberste Gattung.

Diese Bezeichnung deutet an, daß "Begriff" im Sinne der Logik alles Meinbare, also schlechthin alles ist.

W Der widerspruchsvolle Begriff.

Innerhalb des Kalküls sind die Zeichen nur durch die folgenden Grundformeln und Grundregeln definiert. Es könnten ihnen daher beliebige mit diesen Axiomen verträgliche Deutungen unterlegt werden.

Grundformeln | Grundregeln



Bei den Regeln 1.8', 1.9' muß eine Indexbedingung erfüllt sein: Der Index i darf in der Formel b nicht frei vorkommen.[9]

Die Variablen und Indizes (vgl. S. 12) werden nach den folgenden Regeln behandelt:

Sp) Spezialisierungsregel für Variablen:

Variablen dürfen durch beliebige Formeln ersetzt werden.

In diesem Sinne sind die Formeln bzw. Regeln 1.1 bis 1.11 als Formel- bzw. Regel-Schemata anzusehen.
Enthält die in ein solches Schema einzusetzende Formel ein Beziehungszeichen, so ist sie zu umranden (vgl. S. 13).

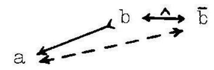
Sp') Spezialisierungsregel für Indizes:

Indizes dürfen durch andere ersetzt werden.
Dabei müssen jedoch freie Indizes frei bleiben, und bei gebundenen darf sich die Bindung nicht ändern.

Die Zeichen dürfen beliebig in die Ebene gelegt und nach Bedarf verzerrt werden, wenn sie nur kenntlich bleiben.
Die Notierung der Grundregeln ist so zu verstehen:
Sind die Prämissen (durchgezogen ——) gegeben, so darf die Konklusion (durchbrochen ---) hinzu gezeichnet werden.

Es mögen folgende Konventionen gelten:
Für die Regelanwendung sind die Verknüpfungszeichen als aus Art-Gattungs-Zeichen zusammengesetzt aufzufassen.
Die Anwendung der Regeln Sp), Sp') und 1.7 wird i. a. nicht ausdrücklich erwähnt. Wir lesen das Zeichen $\succ\!\!\longrightarrow\!\!\prec$ als Abkürzung für $\succ\!\!\Longrightarrow\!\!\prec$.

Bei Anwendung der Regeln dürfen die Prämissen auch speziellere Zeichen enthalten, zB.:



Eigene Axiome für die Zeichen $\longleftarrow\!\!\prec$ und $\overset{\vee}{\longleftrightarrow}$ sind im Augenblick nicht nötig. Diese Zeichen lassen sich später auf geeignete Weise definieren.[10] -
Die Axiome 1.1 bis 1.11, die weitgehend denen der traditionellen Logik entsprechen, sind nicht unabhängig; zB. lassen sich 1.1, 1.4 aus den übrigen ableiten.

Es folgen einige Bemerkungen zu den Axiomen sowie deren umgangssprachliche Übersetzung.

1.1 "Alle a sind a" oder "a ist a". Dies entspricht dem traditionellen Satz der Identität.

1.2 entspricht dem traditionellen Satz vom Widerspruch und lautet: "Kein a ist Nicht-a". Oder anders gewandt: Zu jedem Begriff gibt es einen (total)diversen, sein Negat.

1.3 kennzeichnet den Begriff "Meinbar(es)" als die oberste Gattung: "Alles ist meinbar".

1.4 lautet: "Wenn a Art von b, b Art von c ist, dann ist a Art von c" oder "Wenn alle a b sind und alle b c sind, dann sind alle a c". Das ist das Dictum de omni bzw. der Modus Barbara der Alten.

1.5 entspricht dem Dictum de nullo bzw. dem Modus Celarent: "Was von der Gattung (b) ausgeschlossen ist, nämlich c, ist auch von der Art (a) ausgeschlossen" oder "Wenn alle a b sind und kein b c ist, so ist kein a c".

1.61, 1.62 definieren die Totaldiversität zwischen a und seinem Negat $\bar{a}$, und hierbei insbesondere die Vollständigkeit der Disjunktion: "Wenn kein b a ist, so sind alle b Nicht-a" und "Wenn kein b Nicht-a ist, so sind alle b a". Dies entspricht dem Satz vom Ausgeschlossenen Dritten in gewisser Weise.

1.7 definiert die (Total-)Identität als Art-Gattungs-Verhältnis in beiden Richtungen.

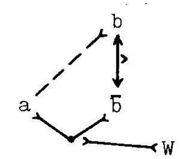
1.8, 1.8' definieren das Spezifikat als oberste gemeinsame Art zweier oder beliebig vieler Begriffe: "Wenn a Art von b und a Art von c ist, so ist a Art von (b und c)" bzw. "Wenn b Art von allen Begriffen a_i ist, so ist b auch Art von deren Spezifikat".

1.9, 1.9' definieren das Generalisat als niedrigste gemeinsame Gattung zweier oder beliebig vieler Begriffe: "Wenn a Art von c und b Art von c ist, dann ist (a oder b) Art von c" bzw. "Wenn jeder Begriff a_i Art von b ist, so ist auch das Generalisat dieser Begriffe a_i Art von b".[11]

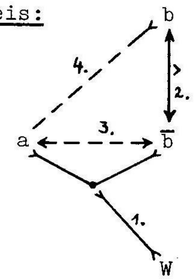
1.10 setzt die Diversität mit dem widerspruchsvollen Begriff in Beziehung: "Ist ein Begriff Art zweier diverser, so ist er widerspruchsvoll; ist das Spezifikat zweier Begriffe widerspruchsvoll, so sind diese divers".

1.11 besagt, daß zwei Spezifikate oder Generalisate, die sich nur im Index unterscheiden, totalidentisch sind.

Um uns mit dem Kalkül BFF ein wenig vertraut zu machen, beweisen wir jetzt einige ableitbare Regeln, die später benötigt werden.

1) 

"Wenn das Spezifikat von a und Nicht-b widerspruchsvoll ist, dann liegt a unter b."

Beweis: 

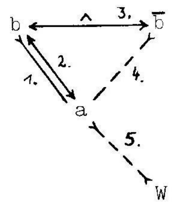
Zum Beweis zeichnen wir das Spezifikat von a und $\bar{b}$ hin sowie dessen totale Identität mit dem widerspruchsvollen Begriff W, die Prämisse oder Annahme. (1.). Gemäß Grundformel 1.2 gehört zu $\bar{b}$ der positive Begriff b; beide sind durch Totaldiversität verbunden (2.). Die Diversität (3.) ergibt sich nach Regel 1.10 und mit Regel 1.62 ist dann die gewünschte Konklusion a ---≺ b (4.) hergeleitet.[12]

Regel 1) gibt eine Bedingung dafür an, daß a unter b liegt: Ein bestimmtes Spezifikat muß widersprüchlich sein. Die nächste Regel sagt, wann dieser Fall eintreten kann:

2) W ≻--≺ a ⇄ b "Ist ein Begriff a Art von b und zu b divers, so ist a widerspruchsvoll."

Beim Beweis notieren wir jetzt nur noch die Nummern der verwendeten Grundformeln und Grundregeln.

Beweis:



1. Annahme
2. Annahme
3. nach 1.2
4. nach 1.61
5. nach 1.10; qed.

Wir werden später noch eine ganze Reihe von weiteren Sätzen aufzustellen haben. Deren Beweise, die i. a. nicht an Ort und Stelle geführt werden, um den Gang der Argumentation nicht zu sehr aufzuhalten, finden sich im Anhang.
Bei wichtigen Sätzen ist der Beweis selbst oder wenigstens seine Fundstelle in der Literatur angegeben.

§ 3.2 Der Kalkül BFF beschreibt eine Boolesche Algebra

Es ist nun an der Zeit, unser nächstes Ziel ins Auge zu fassen, bevor wir mit der Ableitung weiterer Regeln fortfahren. Wir wollen ja nachweisen, daß die Begriffe einen sog. Booleschen Verband bilden. Dazu müssen wir zeigen, daß sich die für Boolesche Verbände charakteristischen Gleichungen in unserem Kalkül ableiten lassen.
Was aber ist ein Boolescher Verband ?

Ein Bereich von Objekten, für den zwei Verknüpfungen $\sqcap$ und $\sqcup$ erklärt sind, heißt Verband, wenn folgende drei Gesetze gelten:

1. $a \sqcap (a \sqcup b) = a$ Absorptionsgesetze
   $a \sqcup (a \sqcap b) = a$
2. $a \sqcap b = b \sqcap a$ Kommutativgesetze
   $a \sqcup b = b \sqcup a$
3. $a \sqcap (b \sqcap c) = (a \sqcap b) \sqcap c$ Assoziativgesetze
   $a \sqcup (b \sqcup c) = (a \sqcup b) \sqcup c$

Ein Verband heißt distributiv, wenn außerdem die

4. $a \sqcap (b \sqcup c) = (a \sqcap b) \sqcup (a \sqcap c)$ Distributivgesetze
   $a \sqcup (b \sqcap c) = (a \sqcup b) \sqcap (a \sqcup c)$ gelten.

Besitzt ein distributiver Verband zwei Elemente n, e mit den Eigenschaften:

5. $a \sqcap n = n$ $a \sqcap e = a$
   $a \sqcup n = a$ $a \sqcup e = e$

und zu jedem Element a ein sog. Inverses a' mit den Eigenschaften:

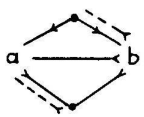
6. $a \sqcap a' = n$ $a \sqcup a' = e$

so spricht man von einem Booleschen Verband oder einer Booleschen Algebra.

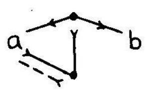
Zum Nachweis, daß diese Gleichungen in unserem Kalkül BFF ableitbar sind, verwenden wir folgende Übersetzung:

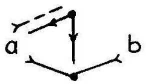
allgemein	a = b	$a \sqcap b$	$a \sqcup b$	a'	n	e
BFF	a b	a b	a b	ā	W	M

Die Absorptionsgesetze (S. 21, 1.) ergeben sich nun ohne weiteres aus der folgenden Regel (Beweis S. 97 ff):

3) 

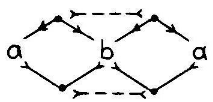
"Stehen zwei Begriffe im Art-Gattungsverhältnis, so ergibt deren Spezifikat die Art, deren Generalisat die Gattung."

4) 

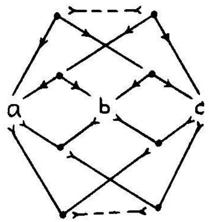


<u>Absorptionsgesetze</u>

(Wir notieren ableitbare Formeln durch Strichelung, wie Konklusionen von Regeln.)

5) 

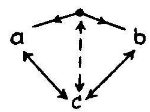
<u>Kommutativgesetze</u>

6) 

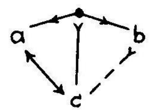
<u>Assoziativgesetze</u>

Letztere Gesetze besagen, daß es bei der Spezifikation oder Generalisation zweier Begriffe nicht auf die Reihenfolge ankommt und bei drei Begriffen nicht auf die Art der Zusammenfassung von je zweien.

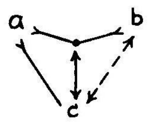
Mit dem Beweis der Gestze 4) bis 6) wären die <u>allgemeinen</u> Verbandseigenschaften erledigt. Der Nachweis der <u>Distributivität</u> erfordert noch weitere Hilfssätze:

7) 

"Ist ein Begriff zu zwei anderen divers, so auch zu deren Generalisat."

8) 

"Wenn alle c (a oder b) sind und kein c a ist, so sind alle c b."

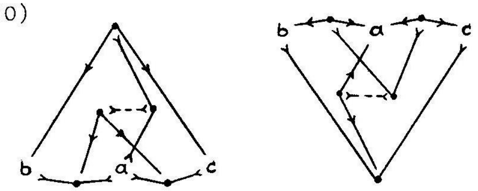
9) 

"Wenn c Art von a, aber divers zu (a und b) ist, dann ist c divers zu b."

Wir sind nun genügend gerüstet, um die Distributivgesetze beweisen zu können, von denen wir hier jedoch nur die erste Gleichung behandeln.

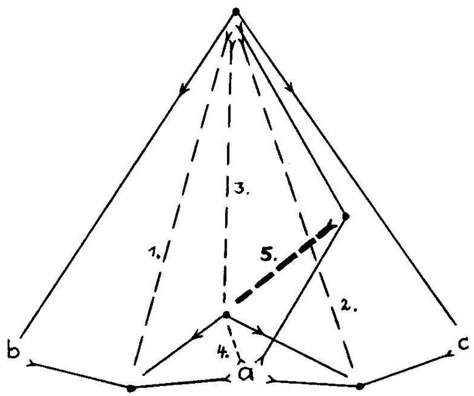
Die behauptete Totalidenität zerfällt gemäß Regel 1.7 in zwei Art-Gattungsbeziehungen, deren erste sich leicht beweisen läßt, während der Beweis der zweiten die Einführung eines zusätzlichen Spezifikates und die Anwendung von Regel 1) verlangt.

10)



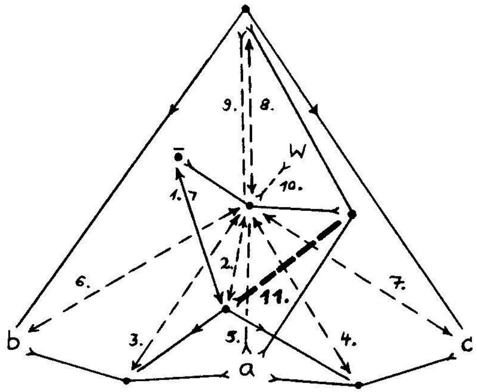
Distributivgesetze

Beweis:



1.	1.4
2.	1.4
3.	1.9
4.	1.9
5.	1.8

Damit ist die eine Richtung (—<) der Totalidentität (>—<) bewiesen. Der Beweis der anderen verläuft so:



1.	1.2
2.	1.5
3.	1.5
4.	1.5
5.	1.4
6.	9)
7.	9)
8.	7)
9.	1.4
10.	2)
11.	1)

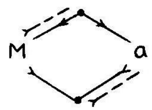
Jetzt wissen wir, daß die Begriffe - dargestellt durch den Kalkül BFF - einen distributiven Verband bilden.

Es fehlt nur noch der Nachweis der typisch booleschen Eigenschaften von M, W und der Negation. Hierzu brauchen wir den folgenden Hilfssatz:

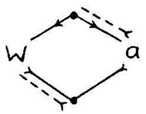
11) W ---< a "Jeder Begriff a liegt über W; dh. W ist die unterste Art."

Damit lassen sich die folgenden Formeln ohne weiteres herleiten:

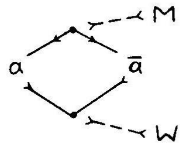
12)



"Spezifizieren mit M ändert nichts, generalisieren mit M ergibt M."

13) 

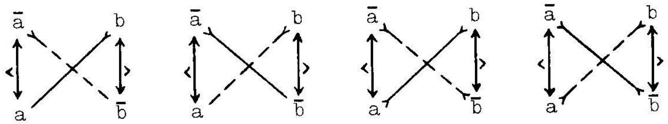
"Spezifizieren mit W ergibt W, Generalisieren mit W ändert nichts."

14) 

"Spezifizieren eines Begriffes mit seinem Negat ergibt W, Generalisieren ergibt M."

Mit dem Beweis der Gesetze 12) bis 14) ist der Nachweis der booleschen Verbandseigenschaften für Begriffe abgeschlossen.

Zum Zwecke späterer Verwendung notieren wir noch:

15) 

Diese Regeln - bekannt unter dem Namen Kontraposition - gelten auch, wenn man a und $\bar{a}$ oder b und $\bar{b}$ vertauscht.

15') $\overline{M}$ ≻--≺ W

$\overline{W}$ ≻--≺ M

"M und W stehen im Negatverhältnis."

Wir fassen zusammen.

Satz I:

Der begriffslogische Kalkül BFF erlaubt die Ableitung der für einen Booleschen Verband bzw. eine Boolesche Algebra charakteristischen Gesetze.

Kurz: Die Begriffe bilden bzgl. der Operationen Spezifikation, Generalisation und Negation einen Booleschen Verband. Dieser Verband ist sogar vollständig, denn es gibt nicht nur zu je zwei Begriffen a und b, sondern zu beliebig vielen Begriffen a_i jeweils ein Spezifikat und ein Generalisat. Wir sprechen stattdessen auch von einer Booleschen Algebra mit verallgemeinerten Operationen.

Aus beweistechnischen Gründen, und um uns den heute gebräuchlichen Kalkülen etwas mehr anzupassen, stellen wir im folgenden einen zu BFF äquivalenten linearen Kalkül BGS auf. Dessen Formeln sind nicht mehrdimensionale Figuren, sondern eindimensionale, wie man das von den üblichen Formalismen gewöhnt ist.

§ 4. 1 Begriffslogik in linearer Darstellung - Der Kalkül BGS

Unser neuer Kalkül geht auf Schröder zurück, wurde aber für unsere Zwecke etwas umgearbeitet. Er heiße BGS (dh. Begriffslogik - Gentzensche Form - Schrödersche Axiomatisierung).[13] Die folgende Übersicht zeigt seine Grundzeichen, deren Bedeutung sich unmittelbar aus der Übersetzung in die Zeichen des Kalküls BFF ergibt (vgl. § 4.2).

B G S Begriffslogik - Gentzensche Form Schrödersche Axiome

Alphabet:	a, b, c ... A, B, C ...	Begriffsvariablen, die beliebig indiziert oder mit Exponenten versehen werden dürfen.
	0, 1	Begriffskonstanten

Das Alphabet darf durch beliebige Zeichen erweitert werden.

Grundzeichen:	$\leqq$ $=$	Beziehungszeichen
	$.$ $+$ $-$	Verknüpfungszeichen
	Π Σ	

Formeln

1. Buchstaben des Alphabets, die auch mit Indizes oder Exponenten versehen sein dürfen, sind Formeln.

. Sind A und B Formeln, so auch $A \leqq B$, $A = B$, $A.B$ bzw. AB, $A+B$, $\bar{A}$, $\prod\limits_i A$, $\sum\limits_i A$.

Die Zeichen "binden" in der Reihenfolge: Π, Σ, $.$, $+$, $\leqq$, $=$. Notfalls wird durch Klammern Eindeutigkeit der Formeln hergestellt.

Statt $\overline{a \leqq b}$, $\overline{a = b}$ schreiben wir auch $a \not\leqq b$, $a \neq b$.

Beispiele für Formeln: a, b_{ik}, $\bar{\bar{A}}$, $\overline{B_k}$, c^I

$a \leqq b_i$, $a \not\leqq \bar{a}$, $a+b$, $\prod\limits_i a_i$

$ab \leqq c$, $a \leqq (b \leqq a)$

Was an der entsprechenden Stelle über die Formeln des Kalküls BFF gesagt wurde, gilt auch hier: Für den Kalkül BGS selbst ist die vorliegende Formeldefinition, ohne dadurch Schaden anzurichten, etwas zu weit.
Sie erweist sich jedoch als angemessen für die später mit Hilfe dieses Kalküls darzustellende Urteilslogik.

Für die Zeichen des Kalküls BGS haben sich u. a. folgende Namen eingebürgert:

$\leqq$ Subsumtionszeichen
Gleichheits- bzw. Identitätszeichen
$.$ Π (logisches) Produktzeichen
$+$ Σ (logisches) Summenzeichen
$-$ Negationszeichen

Normalerweise sind die Grundformeln und Grundregeln eines Kalküls auf dessen Grundzeichen zugeschnitten. So auch bei BFF. Da unser neuer Kalkül BGS zwar die in BFF zur Verfügung stehende Diversität ausdrücken kann (s. u.), aber kein eigenes Zeichen dafür besitzt, wäre es unvorteilhaft, die Axiome von BFF "wörtlich" zu übernehmen. Das im folgenden angegebene leicht abgewandelte Schrödersche Axiomensystem ist bei der vorliegenden Symbolik geeigneter.

<u>Grundformeln</u>

2.1 $a \leq a$

2.2 $ab \leq a, \ ab \leq b$

2.3 $a \leq a+b, \ b \leq a+b$

2.4 $a = ab+a\bar{b}$

$a = (a+b)(a+\bar{b})$

2.5 $0 \leq a, \ a \leq 1$

2.2' $\prod_i a_i \leq a_k$ [14)]

2.3' $a_k \leq \sum_i a_i$

<u>Grundregeln</u>

2.6 $\dfrac{a \leq b \quad b \leq c}{a \leq c}$

2.7 $\dfrac{a \leq b \quad b \leq a}{a = b} \qquad \dfrac{a = b}{a \leq b} \qquad \dfrac{a = b}{a \leq b}$

2.8 $\dfrac{a \leq b \quad a \leq c}{a \leq bc}$

2.9 $\dfrac{a \leq c \quad b \leq c}{a+b \leq c}$

2.8' $\dfrac{b \leq a_i}{b \leq \prod_i a_i}$

2.9' $\dfrac{a_i \leq b}{\sum_i a_i \leq b}$

Sp) Spezialisierungsregel für <u>Variablen</u>:

Variablen dürfen durch beliebige Formeln ersetzt werden.

Sp') Spezialisierungsregel für <u>Indizes</u>:

Indizes dürfen durch andere ersetzt werden.
Dabei müssen jedoch freie Indizes frei bleiben, und bei gebundenen darf sich die Bindung nicht ändern.

Ein Index i heißt <u>gebunden</u> in einer Formel, wenn er im Wirkungsbereich eines $\prod_i$ oder $\sum_i$ steht, andernfalls heißt er <u>frei</u>.

Der <u>Wirkungsbereich</u> eines der genannten Zeichen erstreckt sich in einer Formel von diesem Zeichen aus nach rechts bis zu der Stelle, an der die der nächsten linken Klammer zugehörige rechte Klammer stehen müßte, wenn man keine klammersparenden Konventionen getroffen hätte.

<u>Indexbedingung</u> für die Regeln 2.8' und 2.9':
Der Index i darf in der Formel b nicht frei vorkommen.

Bemerkungen zu den Axiomen:

Die Grundformeln 2.4 könnten durch folgende Regeln ersetzt werden: $\dfrac{a \leq b}{a\bar{b} = 0} \qquad \dfrac{a \leq \bar{b}}{ab = 0} \qquad \dfrac{ab = 0}{a \leq \bar{b}} \qquad \dfrac{a\bar{b} = 0}{a \leq b}$

Von den Grundformeln sind uns nur 2.2 bis 2.4 unbekannt. 2.2, 2.3 sind in BFF schon durch die Gestalt des Spezifikations- bzw. Generalisationszeichens ausgedrückt. Diese Zeichen sind ja aus Art-Gattungszeichen zusammengesetzt, die in den Punkt einmünden.

2.4 definiert für BGS die Negation. Die erste Formel besagt: Jeder Begriff a ist darstellbar als Generalisat "derjenigen a, die b sind" mit "denjenigen a, die Nicht-b sind". Die zweite Formel ist das sog. duale Gegenstück dazu: Hier sind . und + vertauscht.

2.5 enthält gegenüber BFF zusätzlich die Festsetzung, daß 0 unterste Art ist.

§ 4.2 Die Äquivalenz der Kalküle BFF und BGS

Um je nach Bedarf unbesehen den einen oder den anderen Formalismus benutzen zu können, müssen wir jetzt den Nachweis führen, daß beide genau dasselbe leisten, äquivalent sind.

Die Äquivalenz zweier Kalküle zeigt man, soweit es geht, am einfachsten durch den Beweis, daß die Übersetzungen der Grundformeln und -Regeln jeweils des einen Kalküls im anderen ableitbar sind.
Zum Äquivalenzbeweis von BFF und BGS werden wir also zunächst eine Übersetzung angeben und dann zeigen, daß alle Grundformeln und -Regeln von BGS in übersetzter Form in BFF ableitbar sind. Anschließend folgt die Umkehrung: Die Grundformeln und -Regeln von BFF werden - wieder in Übersetzung - in BGS abgeleitet.

Übersetzung:

BFF	$a \longrightarrow\!\!< b$	$a >\!\!\longrightarrow\!\!< b$	$a \longleftrightarrow b$ [15]	$a \vee b$	$a \wedge b$	$\bar{a}$
BGS	$a \doteq b$	$a = b$	$ab = 0$	ab	$a+b$	$\bar{a}$

BFF	$\underset{i}{\bullet\!\!\longrightarrow\!\!<}\; a_i$	$a_i\; \underset{i}{\longleftarrow\!\!\bullet}$	M	W
BGS	$\prod_i a_i$	$\sum_i a_i$	1	0

Da die Zeichen $\longleftarrow\!\!<$ und $\overset{\vee}{\longleftrightarrow}$ in den Axiomen von BFF nicht auftreten, braucht man für sie hier auch keine Übersetzung. Ebenso braucht $\overset{\wedge}{\longleftrightarrow}$ nicht übersetzt zu werden, da dieses Zeichen in den Regeln 1.61, 1.62 ohne weiteres fehlen könnte, und bei der Grundformel 1.2 kommt es nur auf die Diversität an; hier dürfte das Dach ($\wedge$) fehlen.

Wir beginnen nun mit dem Äquivalenzbeweis, der zweierlei zeigt:

a) Jede Grundformel und jede Grundregel von BGS ist in übersetzter Form in BFF ableitbar: BFF $\doteq$ BGS.

Zunächst bemerken wir, daß beide Kalküle übereinstimmen bis auf die Grundformeln 2.2 bis 2.4, 2.5 (erste Hälfte). Diese müssen nun in BFF abgeleitet werden.

Die Formeln 2.2, 2.3 erledigen sich von selbst, da sie schon durch die Gestalt der entsprechenden Verknüpfungszeichen in BFF ihren Ausdruck finden. Spezifikations- und Generalisationszeichen sind ja aus zwei Art-Gattungszeichen zusammengesetzt.

Die erste Hälfte von 2.5 ist durch das Theorem 11) bereits als ableitbar erwiesen.

Die übrigen Beweise, darunter den etwas komplizierteren von 2.4, findet man - wie schon früher verabredet - im Anhang.

Bemerkung: Im Unterschied zum Kalkül BGS müssen für einen Beweis in BFF die zunächst getrennt gegebenen Prämissen einer zu beweisenden Regel oder Formel zu einer einzigen Formel zusammengefügt werden, eventuell unter Einführung weiterer Begriffe, etwa gemäß 1.1 - 1.3, 1.11 oder Theorem 1). Ebenfalls im Unterschied zum Kalkül BGS ist jeder BFF-Beweis gemäß Formeldefinition, S. 13, zugleich eine BFF-Formel, eine sog. Beweisformel, innerhalb derer eine Folge von Teilformeln ausgezeichnet ist gemäß Definition eines Beweises, S. 6, 7.
Für den Äquivalenzbeweis ist nicht erforderlich, daß jede BFF-Formel eine BGS-Formel als Übersetzung besitzt. Es genügt, daß dies nur für die ableitbaren Formeln gilt. So gehen zB. BFF-Beweisformeln in BGS-Beweise über, die ja keine BGS-Formeln sind (vgl. Formeldefinition S. 28).

b) Jede Grundformel und jede Grundregel von BFF besitzt eine in BGS ableitbare Übersetzung: BGS $\leq$ BFF.

Ein Vergleich der beiden Kalküle lehrt, daß nur noch die Axiome 1.2, 1.5, 1.61, 1.62, 1.10 (erste Hälfte) zu behandeln sind.

Wir werden hier nur die Regeln 1.61, 1.62 ableiten, und zwar unter Benutzung eines interessanten Hilfssatzes 16), der sog. Transportationsregel von Peirce. So genannt, weil dabei ein Begriff von der einen auf die andere Seite eines Subsumtionszeichens "transportiert" wird, wobei er allerdings ein Nega-

tionszeichen erhält oder verliert.
Die übrigen Beweise finden sich im Anhang.

16) $a \leq b+c \dashv\vdash a\bar{b} \leq c$ Transportationsregel

$ab \leq c \dashv\vdash a \leq \bar{b}+c$

Auch von diesem Hilfssatz beweisen wir hier nur die im Augenblick benötigten Teile.

Beweis für $a\bar{b} \leq c \vdash a \leq b+c$

(1)	$ab \leq b$	2.2
(2)	$b \leq b+c$	2.3
(3)	$ab \leq b+c$	2.6 aus (1), (2)
(4)	$a\bar{b} \leq c$	Ann.
(5)	$c \leq b+c$	2.3
(6)	$a\bar{b} \leq b+c$	2.6 aus (4), (5)
(7)	$ab+a\bar{b} \leq b+c$	2.9 aus (3), (6)
(8)	$a = ab+a\bar{b}$	2.4
(9)	$a \leq ab+a\bar{b}$	2.7 aus (8)
(10)	$a \leq b+c$	2.6 aus (7), (9)

Beweis für $ab \leq c \vdash a \leq \bar{b}+c$

$$\dfrac{\dfrac{\overset{2.4}{a = ab+a\bar{b}}}{a \leq ab+a\bar{b}}\,{\scriptstyle 2.7} \qquad \dfrac{\dfrac{\overset{\text{Ann.}}{ab \leq c} \quad \overset{2.3}{c \leq \bar{b}+c}}{ab \leq \bar{b}+c}\,{\scriptstyle 2.6} \quad \dfrac{\overset{2.2}{a\bar{b} \leq \bar{b}} \quad \overset{2.3}{\bar{b} \leq \bar{b}+c}}{a\bar{b} \leq \bar{b}+c}\,{\scriptstyle 2.6}}{ab+a\bar{b} \leq \bar{b}+c}\,{\scriptstyle 2.9}}{a \leq \bar{b}+c}\,{\scriptstyle 2.6}$$

Dieser Beweis hat sog. (Stamm-)Baumform.

Es folgen die Beweise von 1.61, 1.62:

<u>1.61</u> $ba = 0 \vdash b \leq \bar{a}$

$$\dfrac{2.7\;\dfrac{\overset{\text{Ann.}}{ba = 0}}{16)\;\dfrac{ba \leq 0}{b \leq \bar{a}+0}} \qquad \dfrac{\overset{2.1}{\bar{a} \leq \bar{a}} \qquad \overset{2.5}{0 \leq \bar{a}}}{\bar{a}+0 \leq \bar{a}}\;2.9}{b \leq \bar{a}}\;2.6$$

<u>1.62</u> $b\bar{a} = 0 \vdash b \leq a$

Der Beweis ergibt sich aus dem eben geführten, wenn man überall a und $\bar{a}$ vertauscht.

Damit ist der Beweis für <u>Satz II</u> erbracht: Die begriffslogischen Kalküle BFF und BGS sind äquivalent.

Wir werden daher im folgenden je nach Bedarf die eine oder die andere Symbolik benutzen und auch die Theoreme fortlaufend weiter numerieren. Zu jedem Satz gehören jetzt zwei Formulierungen, eine in BFF und eine in BGS.

Aus der soeben bewiesenen Äquivalenz folgt natürlich auch, daß der Kalkül BGS einen Booleschen Verband beschreibt.

Bevor wir uns in den nächsten Paragraphen mit einigen Spezialfällen des Kalküls BGS beschäftigen, wollen wir noch eine Bemerkung über die Einteilung der Zeichen in Beziehungs- und Verknüpfungszeichen nachtragen.

Wenn man die Zeichen eines Kalküls auf irgendeine Weise deutet, dann ergibt sich meistens ohne weiteres, welche von ihnen Beziehungen, und welche Verknüpfungen vertreten.

Intuitiv ist ja klar: <u>Beziehungen</u> können vorliegen oder nicht, <u>Verknüpfungen</u> dagegen bilden aus gewissen gegebenen Objekten ein neues Objekt derselben Art. ZB. kann eine Zahl a eine andere Zahl b teilen; es gilt "2 teilt 6", aber nicht "2 teilt 7". Andererseits bildet man zB. mit Hilfe der Addition aus zwei Zahlen a und b eine eindeutig bestimmte dritte Zahl c (= a+b), deren Summe.

Man kann jedoch auch rein syntaktisch definieren, woran Beziehungs- und Verknüpfungszeichen in einem Kalkül zu erkennen sind.

Wir sagen, ein Zeichen z^b werde im Kalkül K als <u>Beziehungszeichen</u> verwendet, wenn eine Formel der Gestalt Az^bB (im zweistelligen Falle; z^bA im einstelligen bzw. beliebigstelligen Falle) als selbständiges Glied einer Herleitung von K auftreten kann.

Kann ein Zeichen z^v innerhalb einer Formel Az^bB oder z^bA in A <u>oder</u> in B auftreten, so sagen wir, es werde im Kalkül K als <u>Verknüpfungszeichen</u> oder Operationszeichen verwendet.

Man beachte, daß ein Zeichen im Sinne dieser Festlegung durchaus einmal als Beziehungszeichen und ein anderes Mal, sogar in derselben Formel, als Verknüpfungszeichen auftreten kann.

Im Kalkül BGS zB. sind $\leftharpoondown$ und $=$ die einzigen Beziehungszeichen; sie werden aber gleichzeitig als Verknüpfungszeichen verwendet. Das liegt daran, daß die Spezialisierungsregel Sp) Einsetzung beliebiger Formeln gestattet. So ist

$(x \leftharpoondown y) \leftharpoondown (x \leftharpoondown y)$ ein Spezialfall der Grundformel 2.1: $a \leftharpoondown a$

Verknüpfungszeichen sind $\neg$, ., +, Π, Σ; sie werden in BGS nicht als Beziehungszeichen verwendet, da Formeln der Gestalt A.B, A+B etc. nicht selbständig in Herleitungen vorkommen können.

Logische Kalküle scheint es zu kennzeichnen, daß ihre Beziehungszeichen stets auch als Verknüpfungszeichen auftreten. Dh. es gibt - mit Ausnahme der Variablen und Konstanten nur Verknüpfungszeichen, von denen einige auch als Beziehungszeichen verwendet werden.

Später werden wir sehen, daß für urteilslogische Kalküle zusätzlich gilt: Jedes Verknüpfungszeichen ist auch Beziehungszeichen.

Nichtlogische Kalküle haben dagegen i. a. eine strenge Trennung zwischen den erwähnten Zeichenarten.

So ist zB. das Gleichheitszeichen $=$ in einem arithmetischen Kalkül niemals Verknüpfungszeichen, da arithmetische Formeln der Gestalt $A = (B = C)$ keinen Sinn ergeben. Wir sagen in diesem Fall, $=$ sei ein reines Beziehungszeichen.

Andererseits kann das Additionszeichen $+$ nie als Beziehungszeichen verwendet werden, da Formeln der Gestalt $A+B$

nie selbständig in arithmetischen Herleitungen auftreten.

$+$ ist daher ein reines Verknüpfungszeichen (vgl. Anhang, § 4).

Formeln eines Kalküls, die mindestens ein Beziehungszeichen enthalten, heißen Beziehungsformeln.

Die Beziehungsformeln der Gestalt $A \leftharpoondown B$ und $A = B$ des Kalküls BGS nennen wir primär, wenn weder in A, noch in B ein Beziehungszeichen vorkommt.

Eine solche Formel heißt sekundär (tertiär etc.), wenn A oder B primär (sekundär etc.) ist.

§ 5 Erweiterungen des Kalküls BGS

Nachdem wir uns nun mit ausreichenden begriffslogischen Hilfsmitteln versehen haben, erscheint ein Blick auf unsere nächste Etappe angebracht. Nach einiger Vorbereitung wollen wir ja Begriffs- und Urteilslogik miteinander vergleichen, mehr noch, die Urteilslogik als einen echten Spezialfall der Begriffslogik erweisen.

Das wird so vor sich gehen: Wir werden den Kalkül BGS Schritt für Schritt durch geeignete Axiome verstärken, bis sich schließlich die Grundformeln und -Regeln der Aussagen- und Prädikatenlogik ableiten lassen.

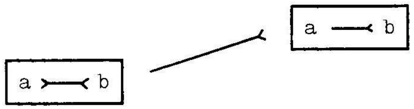
Außerdem wollen wir im folgenden einige Erweiterungen des Kalküls BGS studieren, die nicht unmittelbar mit dem eben erwähnten Ziel zu tun haben, aber für spätere Überlegungen wichtig sind.

§ 5.1 Der Kalkül $BGS^{\vdash}$

Betrachtet man ein Urteil wie etwa "Alle Menschen sind sterblich", so enthält dies zweierlei Bestandteile: Einmal eine gewisse Beziehung zwischen dem Subjektsbegriff "Mensch" und dem Prädikatbegriff "Sterblich(es)", hier ein Art-Gattungs-Verhältnis, zum anderen den in der Kopula "sind" mit ausgedrückten Behauptungscharakter, der etwa besagt: Die Beziehung wird als gültig, vorliegend, wahr behauptet. Dieser für Urteile charakteristische Zug kommt erst in der Urteilslogik voll zur Geltung.

Sofern man ihn aber vernachlässigt und Urteile lediglich als Begriffsbeziehungen auffaßt, unterliegen sie - da ja "meinbar", also auch Begriffe - all den Regeln, die wir bisher über Begriffe im allgemeinen kennen. Insbesondere können solche "Begriffsbeziehungsbegriffe" miteinander verknüpft werden oder ihrerseits in Beziehungen zueinander stehen, wie gewöhnliche Begriffe auch.

ZB. verhält sich die Totalidentität zum Art-Gattungsverhältnis ihrerseits wie die Art zur Gattung: Die Totalidentität ist ein spezielles Art-Gattungsverhältnis, nämlich ein zweifaches. Man könnte das so symbolisieren:



Im Kalkül drückt sich diese Beziehung in der Regel 2.7 aus. Hier kann man zB. von $a = b$ zu $a \leqq b$ übergehen, also von der Art $a = b$ auf die Gattung $a \leqq b$ schließen.

Das legt den Gedanken nahe, das Art-Gattungsverhältnis zwischen Begriffsbeziehungen durch das Verhältnis der Ableitbarkeit zu definieren.

Mit einem Seitenblick auf Gentzens "Kalkül des natürlichen Schließens", der eine ähnliche Regel besitzt, legen wir also fest:[16]

$\vdash$ a) Deduktionsregel:

Ist aus den Annahmeformeln $A_1, \ldots, A_n$ die Formel B im Kalkül BGS hergeleitet worden, so gewinnt man aus dieser Herleitung die Formel $A_1 \ldots A_n \leqq B$, die ihrerseits von den Annahmen nicht mehr abhängt. Die Annahmen werden durch Anwendung der Regel $\vdash$ a) als solche "beseitigt" und dürfen im weiteren Verlauf der Herleitung nicht mehr verwendet werden.[17]

Kurz: $$\frac{A_1, \ldots, A_n \vdash B}{A_1 \ldots A_n \leqq B}$$

$\vdash$ b) Abtrennungsregel: Aus den Formeln $A_1, \ldots, A_n$ und $A_1 \ldots A_n \leqq B$, bei denen jedes A_i und B die Gestalt $x \leqq y$, $x \nleqq y$, $x = y$ oder $x \neq y$ hat, gewinnt man die Formel B.[18]

Kurz: $$\frac{A_1, \ldots, A_n \quad A_1 \ldots A_n \leqq B}{B}$$

Den aus BGS durch Hinzufügen obiger Regeln entstehenden Kalkül nennen wir $BGS^{\vdash}$.

Ein Beispiel möge die Wirkungsweise der neuen Regeln verdeutlichen. Es sei die folgende Regel 17) zu beweisen, die in BGS offensichtlich nicht ableitbar ist, da alle Regeln nur positive Beziehungsformeln der Gestalt $A \leq B$, $A = B$ als Prämissen oder Konklusionen haben.

17) $a \leq b,\ a \nleq c \ \vdash\ b \nleq c$ — Das entspricht dem Syllogismus Bocardo.

Dazu benötigen wir einen Hilfssatz:

18) $ab \leq c \ \dashv\vdash\ a\bar{c} \leq \bar{b} \ \dashv\vdash\ b\bar{c} \leq \bar{a}$

Der Beweis von Satz 17) sieht dann so aus:

(1)	$a \leq b$	Ann.
(2)	$b \leq c$	Ann.
(3)	$a \leq c$	2.6 aus (1), (2)
(4)	$(a \leq b)(b \leq c) \leq (a \leq c)$	$\vdash$ a) aus (1), (2), (3); Ann. (1), (2) beseitigt.
(5)	$(a \leq b)(a \nleq c) \leq (b \nleq c)$	18) aus (4)
(6)	$a \leq b$	Ann.
(7)	$a \nleq c$	Ann.
(8)	$b \nleq c$	$\vdash$ b) aus (5), (6), (7) [19]

Während die Regel $\vdash$ a) innerhalb einer Herleitung sekundäre oder auch noch komplizierter gebaute Formeln einführt, macht die Regel $\vdash$ b) diesen Schritt wieder rückgängig: Man gelangt wieder zu Formeln einfacherer Bauart.

Zu jeder ableitbaren Regel steht uns also in $BGS^{\vdash}$ eine mindestens sekundäre Beziehungsformel der Gestalt $A_1 \ldots A_n \leq B$ zur Verfügung und umgekehrt gibt es zu jeder solchen Formel auch eine ableitbare Regel mit den Prämissen $A_1, \ldots, A_n$

und der Konklusion B.

Kurz: Auf der Ebene der Begriffsbeziehungen (bzw. Beziehungsformeln) sind jeweils die Zeichen $\leq$ und $\vdash$ sowie $=$ und $\dashv\vdash$ vertauschbar.[20]

Im Anschluß an einen üblichen Sprachgebrauch könnte man - cum grano salis - sagen: Während der Kalkül BGS hauptsächlich auf der Objektebene operiert, etabliert der Kalkül $BGS^{\vdash}$ die Boolesche Verbandsstruktur auch auf allen Meta-Ebenen.

Mit den neuen Regeln haben wir nun das, was an den Urteilen rein begrifflicher Natur ist, nämlich die in ihnen enthaltene Beziehung, voll in die Begriffslogik eingemeindet.

§ 5.2 Der Kalkül $BGS_2^{\vdash}$

Hat man durch Einführung der Deduktions- und der Abtrennungsregel den ersten Schritt in Richtung Urteilslogik erfolgreich hinter sich gebracht, dann stellt sich die Frage, ob man ihrer nicht mit einem zweiten vollends habhaft werden könnte.

Typisch für Urteile ist ja, daß sie wahr oder falsch sein können. Und zwar sind sie stets mindestens eins von beidem, beides zugleich aber nicht. Gesucht ist also nach einer Möglichkeit, die Sätze "a ist wahr", "a ist falsch" irgendwie im Kalkül auszudrücken, und zwar so, daß entweder "a ist wahr" oder "a ist falsch" gilt.

Da unsere Begriffslogik genau zwei ausgezeichnete Begriffe kennt, drängt sich die Lösung geradezu auf: Man schränkt den

Booleschen Begriffsverband per Regel auf genau zwei Begriffe ein, nämlich auf 0 und 1.
"a ist wahr" übersetzt man mit a = 1, "a ist falsch" mit a = 0. Die erforderliche Regel lautet:

0/1) $\dfrac{a = 0}{a \neq 1}$ $\quad$ $\dfrac{a \neq 1}{a = 0}$ $\quad$ "Wenn a gleich 0 ist, dann ist a ungleich 1, und umgekehrt."

Den durch diese Erweiterung des Regelsystems gewonnenen spezielleren Kalkül nennen wir $BGS^{\vdash}_{2}$.

In einem derartig dezimierten Verband gelten natürlich besondere Gesetze. Damit ein Spezifikat widersprüchlich wird, muß hier zB. mindestens eine seiner Komponenten **widersprüchlich** sein:

19_2) $ab = 0,\ a \neq 0 \ \vdash\ b = 0$

<u>Beweis</u>:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{2.5}{b \leq 1} \qquad \dfrac{\dfrac{\overset{\text{Ann.}}{a \neq 0}}{a = 1}\,{\scriptstyle 0/1'),\,21)}}{1 \leq a}\,{\scriptstyle 2.7}}{b \leq a}\,{\scriptstyle 2.6} \qquad b \leq b}{b \leq ab}\,{\scriptstyle 2.8} \qquad \dfrac{\overset{\text{Ann.}}{ab = 0}}{ab \leq 0}\,{\scriptstyle 2.7}}{b \leq 0}\,{\scriptstyle 2.6} \qquad \overset{2.5}{0 \leq b}}{b = 0}\,{\scriptstyle 2.7}$$

Leider werden wir später unsere Hoffnung aufgeben müssen, mit der Einschränkung der Begriffsalgebra auf zwei Werte schon die <u>gesamte</u> Urteilslogik in den Griff zu bekommen. Dazu bedarf es noch stärkerer Axiome !
Immerhin stimmt die Marschrichtung: Die Urteilslogik wird sich als eine <u>besondere</u> zwei-elementige Begriffslogik erweisen.

§ 5.3 Individualbegriffe und Kollektive – Der Kalkül $BGS^{\vdash}_{a}$

Unsere Vorbereitungen sind nun genügend weit gediehen, um im nächsten Kapitel die Urteilslogik - besser bekannt unter dem Namen Aussagen- und Prädikatenlogik - zu diskutieren.

Bevor wir damit beginnen, wollen wir noch einen für alles folgende besonders wichtigen Begriffstyp kennenlernen, den sog. <u>Individualbegriff</u>. Bei der Anwendung der Logik hat man allenthalben mit ihm zu tun.
Wir werden uns hier sehr kurz fassen. Weitere Einzelheiten findet der interessierte Leser in der einschlägigen Fachliteratur (vgl. v. Freytag-Löringhoff (3); Schröder (1), II).

Wie der Name schon andeutet, handelt es sich bei Individualbegriffen um etwas "Unteilbares". Teilen bedeutet hier so viel wie spezifizieren. In diesem Sinne sind Allgemeinbegriffe ja normalerweise durch Spezifikation in Unterarten aufteilbar.

Wir legen also fest: Ein Begriff, der nicht widersprüchlich und nicht echt spezifizierbar ist, heißt <u>Individualbegriff</u> oder kurz: Individuum.
Diese Eigenschaft wird durch folgende Axiome im Kalkül ausgedrückt:

<u>Grundformel</u>	<u>Grundregel</u> [22]
I1) $a^I \neq 0$	I2) $\dfrac{b \neq 0 \qquad b \leq a^I}{b = a^I}$

Durch den Exponenten I ist der Individualbegriff bezeichnet.

Die Grundregel liest sich etwa so: Wenn ein Begriff b nicht widersprüchlich und Art eines Individualbegriffes ist, dann ist b mit diesem totalidentisch.
Eine Art Umkehrung dieser Regel läßt sich beweisen: Wenn b echt spezieller als ein Individualbegriff ist, dann ist b widersprüchlich.

Für Individualbegriffe gelten neben den bisher bekannten allgemeinen Regeln noch zusätzliche, zB. ein verschärftes Tertium-non-datur:

20^I) $a^I \not\leq b \dashv\vdash a^I \leq \bar{b}$

An diesen Sonderfall denkt man, wenn man sagt, einem Ding komme eine Eigenschaft entweder zu oder nicht zu.

Zum Beweis, der sich im Anhang findet, benötigt man die Hilfssätze:

21) $a \not\leq b \dashv\vdash a\bar{b} \neq 0$

22) $a \leq \bar{b},\ a \neq 0 \vdash a \not\leq b$

$a \leq b,\ a \neq 0 \vdash a \not\leq \bar{b}$

Eine Bemerkung erscheint hier unerläßlich: Unsere neuen Axiome sagen nur, unter welchen Bedingungen etwas ein Individualbegriff ist. Es ist jedoch damit nicht vorausgesetzt, daß man in unserem Begriffsverband überhaupt je Individualbegriffe antrifft.
<u>Reine</u> Begriffslogik wird zunächst völlig individuenfrei aufgebaut. Dieser Punkt wird uns später noch beschäftigen. Er ist u. a. wichtig für die Beurteilung der intuitionistischen Kritik am Tertium-non-datur.
Macht man dagegen die Voraussetzung, daß unter jedem nichtwidersprüchlichen Begriff mindestens ein Individuum liegen müsse, so begibt man sich - so wollen wir festsetzen - in die <u>Angewandte</u> (Begriffs-)Logik.

Den Kalkül der Angewandten Begriffslogik nennen wir $BGS^{\vdash}_{a}$.
Er ist durch die folgende Regel gekennzeichnet:

a) $\dfrac{a^I \not\leq b}{b = 0}$	"Wenn jeder Individualbegriff a^I nicht unter b liegt, dann ist b widersprüchlich." [23]

Auch hier gelten nun wieder besondere Sätze.
ZB. ist unter diesen Bedingungen jeder Begriff eindeutig darstellbar als Generalisat der unter ihm liegenden Individuen. Die Kalkülformulierung dieses Satzes wollen wir hier

jedoch nicht angeben. Wir tragen sie nach im Kapitel VI, § 3, unter der Nummer 23.2_a).

Wem die Regel a) zu einschneidend vorkommt, der kann innerhalb der Reinen Begriffslogik, also im Kalkül $BGS^{\vdash}$, besondere Begriffe, die sog. Kollektivbegriffe oder kurz: Kollektive definieren. Diese sind dadurch ausgezeichnet, daß unter jeder ihrer nicht-widersprüchlichen Arten mindestens ein Individuum liegt. Das beinhaltet in kontraponierter Form die Regel:

K) $b \doteq a^K,\ c^I \not\doteq b \ \vdash \ b = 0$ [24)]

"a ist ein Kollektiv(-Begriff) - angedeutet durch den Exponenten K -, wenn jede Art b von a, unter der kein Individuum c^I liegt, widersprüchlich ist."

Für Kollektive gilt auch der oben erwähnte Satz 23.2_a): Jedes Kollektiv ist als Generalisat der darunter fallenden Individuen darstellbar und damit durch diese eindeutig bestimmt, was für beliebige Begriffe i. a. nicht zutrifft.
Die für die Angewandte Begriffslogik charakteristische Regel läuft auf nichts anderes hinaus als die Forderung, daß alle Begriffe Kollektive seien.

An dieser Stelle trennt uns nur noch wenig von der heute so berühmten, aber umstrittenen Mengenlehre. Man kann nämlich die unter ein Kollektiv fallenden Individuen zu einem neuen Individuum zusammenfassen, das man dann Menge oder Klasse nennt.

Sei a^K das betrachtete Kollektiv. Dann stehen die betreffenden Individuen zu ihm im Art-Gattungsverhältnis: $x^I \doteq a^K$, zu der dazugehörigen Menge jedoch - sie heiße $\mathfrak{A}$ - in einer nicht-logischen, der sog. Elementbeziehung: $x^I \in \mathfrak{A}$. Genauer: $x^I \in \mathfrak{A}^I$, da die Menge als ein Individuum betrachtet wird. Dabei ist die nicht selbstverständliche Voraussetzung gemacht, es gebe zu jedem Kollektiv bzw. mindestens zu den in Betracht gezogenen eine solche Menge.

Unter Rückgriff auf die Begriffsoperationen und -Beziehungen kann man entsprechende Operationen und Beziehungen auch für Mengen definieren.
Dem logischen Produkt zweier Kollektive a.b entspricht dann der sog. Durchschnitt zweier Mengen $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{B}$, der logischen Summe a+b die sog. Vereinigung $\mathfrak{A} \cup \mathfrak{B}$, dem Negat $\bar{a}$ die sog. Komplementärmenge $\mathfrak{A}'$, dem verallgemeinerten Produkt $\prod_i a_i$ der Durchschnitt $\bigcap_i \mathfrak{A}_i$ von beliebig vielen Mengen $\mathfrak{A}_i$, der verallgemeinerten Summe $\sum_i a_i$ die beliebige Vereinigung $\bigcup_i \mathfrak{A}_i$.
Dem Art-Gattungsverhältnis zwischen Kollektiven $a \doteq b$ entspricht die sog. Teilmengenbeziehung (Inklusion) $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$, und der Identität von Kollektiven $a = b$ die Identität von Mengen $\mathfrak{A} \overset{m}{=} \mathfrak{B}$.
Mengen schreibt man auch so: $\{\ldots\}$, wobei anstelle der Punkte die für die Elemente der Menge charakteristische Eigenschaft steht oder die Elemente selbst aufgeführt sind.
Bzgl. der genannten Operationen bilden die Mengen - man betrachtet meist Teilmengen einer vorgegebenen Grundmenge - eine Boolesche Algebra mit verallgemeinerten Operationen.

<u>Übersicht</u> zum Verhältnis Begriffslogik - Mengenlehre

Begriffslogik	$a \leq b$	$a^I \leq b$	$a = b$	$a.b$	$a+b$
Mengenlehre	$\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$	$a^I \in \mathfrak{B}$ bzw. $\{a^I\} \subseteq \mathfrak{B}$	$\mathfrak{A} \overset{m}{=} \mathfrak{B}$	$\mathfrak{A} \cap \mathfrak{B}$	$\mathfrak{A} \cup \mathfrak{B}$
Begriffslogik	$\bar{a}$	$\prod_i a_i$	$\sum_i a_i$		
Mengenlehre	$\mathfrak{A}'$	$\bigcap_i \mathfrak{A}_i$	$\bigcup_i \mathfrak{A}_i$		

$\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ sind die zu den Kollektiven a, b gehörigen Mengen; $\{a^I\}$ ist die Menge, die nur das Individuum a^I als Element enthält.

Man könnte durch Hinzunahme geeigneter Axiome für die Elementbeziehung den Kalkül $BGS^{\vdash}_{a}$ zu einem mengentheoretischen Kalkül ausbauen oder aber unabhängig von der Begriffslogik einen eigenen Mengen-Kalkül aufstellen. Da der Übergang von den Kollektiven zu den Mengen - wie sich später noch deutlicher zeigen wird - nicht ganz unproblematisch ist, stellt sich die Frage, ob man auf diesen Schritt nicht ganz verzichten kann.

Zumindest für die Begriffslogik, aber auch für die Urteilslogik ist die Element-Beziehung überflüssig. Alles logisch Wichtige läßt sich ohne Rückgriff auf Mengen sagen.

Wie aber steht es mit der Mathematik ?

Da sich die gesamte bisher bekannte Mathematik mengentheoretisch begründen läßt, kann man fragen: Genügt zur Grund-

legung der Mathematik vielleicht schon die allgemeinere, also logisch schwächere Theorie der Kollektive ?

Wir glauben gute Gründe für die Bejahung dieser Frage zu haben, wollen hier aber nicht ins einzelne gehen. Jedenfalls läßt sich der Kalkül $BGS^{\vdash}_{a}$ innerhalb der bisher benutzten Ausdrucksmittel zu einem <u>Relationen-Kalkül</u> oder Kalkül der Relative weiterentwickeln, der zur Darstellung wichtiger Grundbegriffe und Strukturen der Mathematik ausreicht.[25]

§ 6 Zusammenfassung

Fassen wir unseren bisherigen Ertrag zusammen:

Begriffslogik handelt von Begriffen sowie von deren Beziehungen und Verknüpfungen. Als Begriff ist dabei alles Meinbare zugelassen. Begriffslogik kennt in dieser Hinsicht keinerlei Einschränkungen.

Als wichtige Begriffsbeziehungen erwiesen sich das Art- Gattungsverhältnis und die Totalidentität.

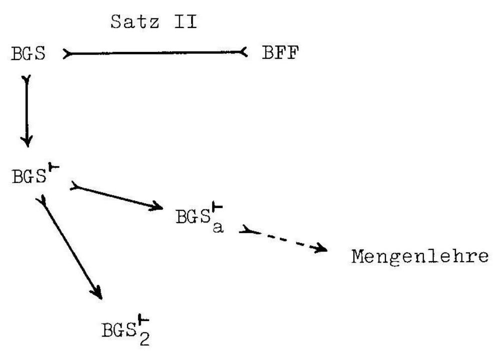
Bezüglich der Verknüpfungen Spezifikation, Generalisation und Negation tragen die Begriffe die algebraische Struktur einer Booleschen Algebra mit verallgemeinerten Operationen.

Auf dem Weg zur Urteilslogik erwiesen sich besondere Regeln zur Behandlung der Begriffsbeziehungen als notwendig: Sie definieren das Art-Gattungsverhältnis zwischen Begriffsbeziehungen durch Rückgriff auf das Verhältnis der Ableitbarkeit bestimmter Formeln im Begriffskalkül. Der Kalkül BGS wurde dadurch zu $BGS^{\vdash}$ erweitert.

Ein zweiter Schritt führte uns zu der auf die beiden Begriffe

O und 1 eingeschränkten, durch den Kalkül $BGS^{\vdash}_{2}$ dargestellten zweielementigen Begriffsalgebra.
Die Forderung, daß unter jeden nicht-widersprüchlichen Begriff mindestens ein Individuum fallen müsse, machte aus der Reinen eine <u>Angewandte</u> Begriffslogik, verstärkte den Kalkül $BGS^{\vdash}$ zu $BGS^{\vdash}_{a}$. Dadurch wurde eine weitere Verstärkung möglich, die Mengen- bzw. Klassenbildung zu bestimmten Begriffen.

Man bemerkt also eine gewisse Hierarchie von begriffslogischen Kalkülen, die man folgendermaßen veranschaulichen kann:



Die Pfeilspitzen deuten jeweils zu den spezielleren, stärkeren Kalkülen.
Das Diagramm ist nur deshalb so unsymmetrisch gezeichnet, weil es später noch vervollständigt werden soll. Insbesondere werden die entsprechenden Spezialisierungen des Kalküls BFF im Anhang auf Seite 128 ff behandelt.

IV. Urteilslogik

§ 1 Übersicht

Da die Urteilslogik in Gestalt der sog. Aussagen- und Prädikatenlogik allgemein bekannt ist, können wir uns hier kurz fassen. Nach einigen Bemerkungen zur Aussagenlogik, die als Theorie der Wahrheitswertfunktionen aufgebaut werden kann, und der Einführung von Satzfunktionen und Quantoren geben wir einen aussagen- und prädikatenlogischen Kalkül APL an.

Im Gegensatz zur Begriffslogik, die bei den Begriffen als den "kleinsten" Bestandteilen der Schlüsse ansetzt, handelt die Urteilslogik von mehr oder minder zusammengesetzten Gebilden, - wie der Name schon sagt - von Urteilen.
In ihrer auf Frege zurückgehenden sog. klassischen Form berücksichtigt sie von diesen aber nur, daß sie wahr oder falsch sein, allgemeiner: genau zwei Werte, zB. T oder F, annehmen können. Urteile hinsichtlich ihrer Wahrheit und Falschheit betrachtet, sowie deren endliche Verknüpfungen sind Gegenstand der sog. <u>Aussagenlogik</u>.
Auf diese stützt sich die sog. <u>Prädikaten</u>- oder auch Quantoren<u>logik</u>, die es mit der feineren Zusammensetzung der Urteile (Subjekt-Prädikat-Struktur etc.) und insofern auch mit Begriffen zu tun hat. Begriffe werden hier als besondere zweiwertige Funktionen aufgefaßt und so dem urteilslogischen Ansatz zugänglich gemacht.
Traten in der Begriffslogik Urteile als spezielle Begriffe,

Beziehungs-Begriffe, auf, so erscheinen - urteilslogisch betrachtet - Begriffe als besondere Urteile, als sog. Satzfunktionen.
Aussagen- und Prädikatenlogik fassen wir unter der Bezeichnung Urteilslogik (UL) zusammen.

§ 2 Aussagenlogik

Zunächst geben wir die formale Sprache der gesamten Urteilslogik an, die etwas mehr enthält als wir im Augenblick benötigen.

<u>Alphabet:</u>	A, B, C ...	Aussagenvariablen
	a, b, c ...	Individuenvariablen

<u>Grundzeichen:</u> $\Rightarrow \quad \Leftrightarrow \quad \wedge \quad \vee \quad \neg \quad \bigwedge \quad \bigvee$

Das Alphabet darf durch beliebige Zeichen erweitert werden.

<u>Formeln:</u>

1. Aussagenvariablen, eventuell mit Individuenvariablen dahinter, sind Formeln.
2. Sind A und B Formeln, so auch $A \Rightarrow B$, $A \Leftrightarrow B$, $A \wedge B$, $A \vee B$, $\neg A$, $\bigwedge xA$, $\bigvee xA$.

Nötigenfalls wird durch Klammern Eindeutigkeit der Formeln gewährleistet.

Die Zeichen "binden" in der Reihenfolge: $\neg, \bigwedge, \bigvee, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow$.

Beispiele für Formeln: A, Bik, $\neg\neg A$, $\neg Bk$
$A \Rightarrow Bi$, $\neg(A \Rightarrow \neg A)$, $A \vee B$, $\bigwedge i\, Ai$
$A \wedge B \Rightarrow C$, $A \Rightarrow (B \Rightarrow A)$

$A \Rightarrow B$	wird gelesen als	"A impliziert B", "Wenn A, dann B"
$A \Leftrightarrow B$		"A ist äquivalent mit B", "Genau wenn A, dann B"
$A \wedge B$		"A und B"
$A \vee B$		"A oder B" (nichtausschließend)
$\bigwedge xA$		"Für alle x gilt A"
$\bigvee xA$		"Für mindestens ein x gilt A"

Formeln, die weder $\bigwedge$ noch $\bigvee$ enthalten, heißen <u>aussagenlogische</u> Formeln.

Die sog. <u>klassische</u>, auf Frege zurückgehende Aussagenlogik ruht auf der Voraussetzung, daß jede Aussage entweder wahr oder falsch ist. Jede Aussage kann also nur genau einen der beiden Wahrheitswerte T (für true) oder F (für false) annehmen. Verknüpfungen zwischen Aussagen kann man daher einfach kombinatorisch definieren, indem man festlegt, in welchen Fällen das Verknüpfungsergebnis T bzw. F sein soll.
So wird man auf die sechzehn zweistelligen sog. <u>Wahrheitswertfunktionen</u> geführt, die durch folgende Tabelle angegeben

werden können:

A	B	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
T	T	T	F	T	F	T	F	T	F	T	F	T	F	T	F	T	F
T	F	T	T	F	F	T	T	F	F	T	T	F	F	T	T	F	F
F	T	T	T	T	T	F	F	F	F	T	T	T	T	F	F	F	F
F	F	T	T	T	T	T	T	T	T	F	F	F	F	F	F	F	F
			$/$	$\Rightarrow$	$\neg A$		$\neg B$	$\Leftrightarrow$	$\downarrow$	$\vee$						$\wedge$	

Diese Tafel dient zur Definition der zuvor eingeführten logischen Zeichen. Mit ihrer Hilfe kann man für jede beliebige aussagenlogische Formel den Wahrheitswert "berechnen", wenn man die verschiedenen Belegungen der Variablen mit den Werten T, F untersucht.

Die Funktionen $/$ und $\downarrow$ sind jeweils allein in der Lage, alle übrigen Funktionen auszudrücken. So kann man $\neg A$ zB. schreiben als A/A.

Dasselbe gilt für die Funktionenpaare $\Rightarrow, \neg$; $\wedge, \neg$; $\vee, \neg$.

Im Prinzip könnte man also in der Aussagenlogik mit sehr wenigen Zeichen auskommen. Je weniger Zeichen man verwendet, desto komplizierter werden jedoch i. a. die zu behandelnden Formeln. Aus verbandstheoretischen, aber auch aus umgangssprachlichen Gründen empfiehlt sich die Einführung der oben angegebenen Zeichen $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$, $\wedge$, $\vee$, $\neg$.

Über die Stellenzahl zwei braucht man bei den Wahrheitswertfunktionen nicht hinauszugehen, da sich mehrstellige Funktionen stets aus zweistelligen zusammensetzen lassen.

Von besonderem Interesse sind Formeln, die bei jeder Belegung

ihrer Variablen den Wert T annehmen, sog. Tautologien, und von diesen insbesondere solche der Gestalt $A_1 \wedge \dots \wedge A_n \Rightarrow B$, da man aus ihnen logische Schlußregeln $\dfrac{A_1, \dots, A_n}{B}$ gewinnt.

Diese Schlußregeln haben die Eigenschaft, daß mit den Prämissen A_i stets auch die Konklusion B den Wert T erhält.

Diese wenigen Bemerkungen zur Aussagenlogik als Theorie der Wahrheitswertfunktionen mögen hier genügen. Einzelheiten darüber kann man in jedem gängigen Logik-Lehrbuch nachlesen.[26)]

Im Gegensatz zu dem eben erwähnten sog. semantischen Ansatz - semantisch deswegen, weil hier auf den Wahrheitswert als die "Bedeutung" einer Aussage Bezug genommen wird - kann man auch rein syntaktisch vorgehen: Man stellt einen Kalkül zur Ableitung aussagenlogischer Formeln auf.

Ein solcher Kalkül heißt (semantisch) vollständig und (semantisch) widerspruchsfrei, wenn er alle und auch nur Tautologien abzuleiten gestattet.

Bei den heute üblichen Kalkülen kann man u. a. drei Typen unterscheiden:

a) Hilbert-Typ-Kalküle, von Gentzen logistische genannt, zeichnen sich aus durch eine relativ große Anzahl von Grundformeln gegenüber wenigen Grundregeln. Meist gibt es überhaupt nur eine: Die Abtrennungsregel.

b) Gentzen-Typ-Kalküle besitzen wenige Grundformeln, jedoch viele Grundregeln und zerfallen in zwei Sorten:
   1) Kalküle des "Natürlichen Schließens". Hier gibt es i. a.

keine besonderen Grundformeln. Beliebige Annahmen dürfen eingeführt, müssen aber innerhalb derselben Herleitung wieder beseitigt werden. Überhaupt besitzen diese Kalküle eigentümliche Einführungs- und Beseitigungsregeln für jedes der logischen Verknüpfungszeichen.

2) Sequenzenkalküle. Deren Regeln sind i. a. aufbauend, dh. alle Teilformeln (oder zumindest alle Variablen) der Prämissen treten in der Konklusion wieder auf.
Gewisse Regeln, die nicht diese Eigenschaft besitzen, wie zB. die Transitivitäts- oder die sog. Schnittregel, lassen sich innerhalb solcher Kalküle als zulässig erweisen (Gentzenscher Hauptsatz).

c) Die Tableaux-Kalküle (nach Beth) beruhen auf einer Art des indirekten Beweises. Anstatt eine Formel herzuleiten, widerlegt man ihre Negation nach bestimmten Regeln. Man unterscheidet die sog. analytischen Tableaux von Smullyan und die Block-Tableaux von Hintikka, die mit den Sequenzenkalkülen gewisse Eigenschaften gemein haben.

Für den Vergleich von Begriffs- und Urteilslogik erscheinen uns die Hilbert-Typ-Kalküle am geeignetsten. Wir werden daher im folgenden einen solchen Kalkül, der auf Frege zurückgeht und von Lukasiewicz vereinfacht wurde, zugrunde legen.

§ 3 Satzfunktionen und Quantoren

Die Aussagenlogik behandelt Aussagen als nicht weiter zerlegbare Grundeinheiten und ist daher unfähig, auch deren feinere Struktur (Zusammensetzung aus Subjekt und Prädikat etc.) zu berücksichtigen. Da die innere Struktur der Aussagen für das Schließen meist nicht gleichgültig ist, müssen Mittel und Wege gefunden werden, die innerhalb von Urteilen auftretenden Begriffe sowie deren Beziehungen und Verknüpfungen darstellen zu können, ohne den urteilslogischen Ansatz zu verlassen und den Aussagenkalkül als solchen zu zerstören.
Zu diesem Zweck betrachtet man im Anschluß an Frege Begriffe - jetzt Prädikate genannt - als **Funktionen**, deren Argumentbereich aus allen möglichen Individuen und deren Wertebereich aus den beiden Wahrheitswerten T, F besteht.
Ausgehend von <u>Individualurteilen</u> wie etwa "Sokrates ist sterblich" bildet man sog. Aussageformen - in diesem Fall "x ist ein Mensch"- und schreibt diese dann als sog. <u>Satzfunktionen</u>, etwa M(x). Je nach dem, ob die Aussage "x ist ein Mensch" für ein spezielles x zutrifft oder nicht, nimmt die Funktion M an der Stelle x den Wert T oder F an. Falls a ein bestimmtes Individuum bezeichnet, ist dann M(a) eine Aussage im gewohnten Sinn, die mit anderen Aussagen - wie schon früher erwähnt - verknüpft und in Beziehung gesetzt werden kann.

Um auszudrücken, daß ein Prädikat P auf alle möglichen oder aber auf mindestens ein Individuum zutrifft, führt man zwei neue Zeichen ein, die sog. <u>Quantoren</u>:

$\bigwedge x\ P(x)$	bedeutet:	"Für <u>alle</u> x gilt: x ist ein P."
$\bigvee x\ P(x)$	bedeutet:	"Für <u>mindestens ein</u> x gilt: x ist ein P."

In Analogie zur $\wedge$-Verknüpfung der Aussagenlogik, die ja genau dann T ergibt, wenn beide Verknüpfungsglieder den Wert T annehmen, erhält $\bigwedge x\ P(x)$ genau dann den Wert T, wenn die Funktion P an jeder beliebigen Stelle x den Wert T annimmt, dh. konstant mit dem Wert T ist.
In ähnlicher Entsprechung zur $\vee$-Verknüpfung der Aussagenlogik, die genau dann T ergibt, wenn mindestens eines der Verknüpfungsglieder den Wert T annimmt, erhält $\bigvee x\ P(x)$ genau dann den Wert T, wenn die Funktion P an mindestens einer Stelle x den Wert T annimmt, dh. wenn sie <u>nicht</u> konstant mit dem Wert F ist.
Die Quantoren können daher mit Recht als verallgemeinerte $\wedge$- bzw. $\vee$-Verknüpfungen betrachtet werden:

$\bigwedge x\ P(x)$	entspricht:	$P(a) \wedge P(b) \wedge P(c) \wedge \ldots$
$\bigvee x\ P(x)$	entspricht:	$P(a) \vee P(b) \vee P(c) \vee \ldots$

Satzfunktionen können auch mehrstellig sein. Sie vertreten dann nicht "gewöhnliche" Eigenschaften sondern Beziehungen. So ist zB. "größer als" eine zweistellige Beziehung; x ist größer als y könnte man schreiben als G(x,y). Eine dreistellige Beziehung etwa wäre "zwischen". Z(x,y,z) könnte man als Abkürzung wählen für: x liegt zwischen y und z etc.

Mit Hilfe der Quantoren und der aussagenlogischen Zeichen kann man nun darstellen, wie sich zwei Satzfunktionen und damit zwei Begriffe zueinander verhalten. ZB. kann man ausdrücken, daß eine Funktion P an jeder Stelle x den Wert T annimmt, an der auch die Funktion S diesen Wert erhält, oder daß die beiden Funktionen S und P an mindestens einer Stelle x gemeinsam den Wert T annehmen etc.
Die üblicherweise mit a, e, i und o bezeichneten Urteilsformen der traditionellen Syllogistik lassen sich wie folgt symbolisieren:

SaP	"Alle S sind P"	$\bigwedge x\ (S(x) \Rightarrow P(x))$
SeP	"Alle S sind nicht P"	$\bigwedge x\ (S(x) \Rightarrow \neg P(x))$
SiP	"Einige S sind P"	$\bigvee x\ (S(x) \wedge P(x))$
SoP	"Einige S sind nicht P"	$\bigvee x\ (S(x) \wedge \neg P(x))$

Im Kalkül $BGS^{\vdash}$ etwa lassen sich die genannten Urteile so ausdrücken:

SaP	$S \leqq P$	SeP	$S \leqq \overline{P}$
SiP	$SP \neq 0$	SoP	$S\overline{P} \neq 0$

Dabei ist aber zu beachten, daß die Satzfunktionen der Prädikatenlogik genau genommen nicht Begriffen im allgemeinen, sondern nur den <u>Kollektiven</u> entsprechen, da ihre Argumente ja Individuen sind. Das sieht man besonders deutlich daran, daß $S \neq 0$ hier nur durch $\bigvee x\ S(x)$ widergegeben werden kann. Dh. S ist genau dann nicht widersprüchlich, wenn es auf mindestens ein Individuum x zutrifft. Das aber gilt nur in der Angewandten Logik bzw. der Theorie der Kollektive.

§ 4 Ein Axiomensystem für die Aussagen- und Prädikatenlogik - Der Kalkül APL

Wir geben im folgenden einen weit verbreiteten Hilbert-Typ-Kalkül für die Aussagen- und Prädikatenlogik an, der meist nach Lukasiewicz benannt wird.

A P L Aussagen- und Prädikatenlogik nach Lukasiewicz

Alphabet, Grundzeichen und Formeldefinition für diesen Kalkül sind schon im § 2 angegeben.

Grundformeln

4.1 $A \Rightarrow (B \Rightarrow A)$

4.2 $(A \Rightarrow (B \Rightarrow C)) \Rightarrow ((A \Rightarrow B) \Rightarrow (A \Rightarrow C))$

4.3 $(\neg A \Rightarrow \neg B) \Rightarrow (B \Rightarrow A)$

4.4 $\bigwedge x\, Ax \Rightarrow Ay$

4.5 $Ay \Rightarrow \bigvee x\, Ax$

Grundregeln

4.6 $\dfrac{A \quad A \Rightarrow B}{B}$

4.7 $\dfrac{A \Rightarrow Bx}{A \Rightarrow \bigwedge x\, Bx}$

4.8 $\dfrac{Ax \Rightarrow B}{\bigvee x\, Ax \Rightarrow B}$

Bei 4.7, 4.8 darf die Variable x in A bzw. in B nicht frei vorkommen. Dabei ist freies und gebundenes Vorkommen von Variablen wie üblich definiert.[27]

Sp) Spezialisierungsregel für Aussagenvariablen:

Aussagenvariablen dürfen durch beliebige Formeln ersetzt

werden.

Sp') Spezialisierungsregel für Individuenvariablen:

Individuenvariablen dürfen durch andere ersetzt werden. Dabei müssen jedoch freie frei bleiben, und bei gebundenen darf sich die Bindung nicht ändern.

Im Unterschied zu der Schreibweise in § 3 sind hier der Einfachheit halber die Klammern um die Individuenvariablen weggelassen. Fx steht für F(x), Rxy für R(x,y) etc.

Das vorliegende Axiomensystem enthält an aussagenlogischen Zeichen nur $\Rightarrow$ und $\neg$. Wie schon früher erwähnt, sind damit jedoch alle übrigen Aussagenverknüpfungen definierbar, insbesondere $\wedge$, $\vee$ und $\Leftrightarrow$.

V. Vergleich von Begriffs- und Urteilslogik

§ 1 Übersicht

Wir nähern uns jetzt dem Schwerpunkt der ganzen Arbeit. Der angekündigte Vergleich wird in dem Nachweis bestehen, daß die Reine Begriffslogik echt allgemeiner als die Urteilslogik ist, sich aber durch geeignete Zusätze bis hin zur Urteilslogik verstärken läßt. Auf diese Weise kann man den Unterschied zwischen Begriffen und Urteilen, der sich in den zugehörigen begriffslogischen und urteilslogischen Kalkülen durch rein syntaktische Eigenschaften ausdrückt, genau angeben.

Wir werden daher folgendes zeigen:

Es gibt im urteilslogischen Kalkül APL ableitbare Formeln, deren Übersetzungen in $BGS^{\vdash}$ nicht ableitbar sind. Der Kalkül APL ist jedoch äquivalent mit dem neuen Kalkül $BGS^{\vdash}_{u}$, der aus $BGS^{\vdash}$ durch Hinzufügen des sog. Urteilsprinzips u) entsteht.

§ 2.1 Der Kalkül $BGS^{\vdash}_{u}$

Wie schon früher erwähnt, besteht der Hauptunterschied zwischen Begriffen und Urteilen darin, daß letztere behauptet werden können. Diesen für Urteile typischen Behauptungscharakter gilt es nun im Kalkül auszudrücken.

Zum Teil macht sich diese Eigenschaft der Urteile bereits in begriffslogischen Formalismen dadurch bemerkbar, daß Beziehungsformeln, also etwa Formeln der Gestalt $A \doteq B$, $A = B$ - durch sie werden ja in der Begriffslogik Urteile vertreten - selbständig in Herleitungen auftreten können, was für andere Formeln nicht gilt. Behaupten eines Urteils heißt hier so viel wie: Die zugehörige Beziehungsformel zum Anfang einer Herleitung machen.

Damit ist aber bei weitem noch nicht alles für Urteile Charakteristische zum Ausdruck gebracht. Es bedarf noch besonderer Axiome, um die volle Urteilslogik zu gewinnen. Rein syntaktisch kann man das auch daran sehen, daß die urteilslogisch ableitbaren Formeln $A \vee \neg A$ und $A \Rightarrow (B \Rightarrow A)$ zB. in $BGS^{\vdash}$ nicht ableitbar sind. $A \vee \neg A$ zB. ist nicht ableitbar, weil $BGS^{\vdash}$ nur Formeln der Gestalt $A \doteq B$, $A = B$ ableitet.

Zur Charakterisierung der vollen Urteilslogik wählen wir das sog. Aristotelische Wahrheits- oder Urteilsprinzip, das etwa besagt: Jedes Urteil A ist gleichbedeutend mit dem anderen Urteil "A ist wahr" bzw. "A gilt". Als Regel geschrieben:

u) $\dfrac{A}{A = 1} \qquad \dfrac{A = 1}{A}$

Den durch diesen Zusatz aus $BGS^{\vdash}$ entstehenden Kalkül nennen wir $BGS^{\vdash}_{u}$. Um ihn von unseren übrigen begriffslogischen Kalkülen genügend zu unterscheiden, wollen wir hier nur große Buchstaben als Variablen verwenden.

Man beachte, daß die Deduktionsregel $\vdash$ a) (vgl. S. 47) nun auch auf Herleitungen angewandt werden kann, in denen von der neuen Regel u) Gebrauch gemacht wurde.
So gewinnt man aus u) durch zweimalige Anwendung von $\vdash$ a) unmittelbar die Formel

$\tilde{u}$) $\vdash A = (A = 1)$

Man sieht sofort, daß in diesem neuen Kalkül die Formel $A \vee \neg A$ in der Übersetzung $A + \bar{A}$ ableitbar ist, da sich $A + \bar{A} = 1$ in $BGS^{\vdash}$ ableiten läßt (vgl. Satz 14)).
Das Urteilsprinzip in Gestalt der Regel u) oder der Formel $\tilde{u}$) macht die spezifische Differenz zwischen Begriffs- und Urteilslogik aus. Mit seiner Hilfe gewinnt man einige wichtige Theoreme, die dann den Nachweis der Äquivalenz der Kalküle $BGS^{\vdash}_u$ und APL ermöglichen. Diese Äquivalenz behauptet Satz III, den wir im folgenden Paragraphen beweisen werden.
Alle bisher betrachteten begriffslogischen Formalismen erweisen sich jedoch als nicht so stark wie die volle Urteilslogik bzw. der Kalkül APL. Die Urteilslogik ist damit in gewisser Weise die speziellste logische Theorie und hat als solche den engsten Anwendungsbereich.

§ 2.2 Die Äquivalenz der Kalküle $BGS^{\vdash}_u$ und APL

Wir geben zunächst die Übersetzung der Zeichen an:

$BGS^{\vdash}_u$	$A \leq B$	$A = B$	AB	$A+B$	$\bar{A}$
APL	$A \Rightarrow B$	$A \Leftrightarrow B$	$A \wedge B$	$A \vee B$	$\neg A$

$BGS^{\vdash}_u$	$\prod_x A_x$	$\sum_x A_x$
APL	$\bigwedge x\, Ax$	$\bigvee x\, Ax$

Die Indizes in begriffslogischer Schreibweise entsprechen den Individuenvariablen der Prädikatenlogik, die jedoch neben die Quantoren gesetzt werden, während die Indizes unter dem logischen Zeichen stehen.

Der Äquivalenzbeweis hat wieder zwei Teile: Es ist $BGS^{\vdash}_u \leq$ APL und APL $\leq BGS^{\vdash}_u$ zu zeigen.
Den Nachweis, daß alle in APL ableitbaren Formeln eine in $BGS^{\vdash}_u$ ableitbare Übersetzung besitzen, werden wir in gewohnter Weise führen. Die Umkehrung ergibt sich folgendermaßen: Da der Kalkül APL bekanntlich vollständig ist, also <u>alle</u> allgemeingültigen Formeln ableitet, genügt es zu zeigen, daß in $BGS^{\vdash}_u$ <u>nur</u> allgemeingültige Formeln ableitbar sind. Damit ist dann die Äquivalenz der beiden Kalküle bewiesen.

Wir benötigen die folgenden Hilfssätze:

24) $a = b,\ b = c \vdash a = c \qquad a = b \vdash b = a$

25) $a \leq b \dashv\vdash \bar{a}+b = 1$

26_u) $\vdash (A \leq B) = (\bar{A}+B)$

Beweis:

(1)	$(A \leq B) = (\bar{A}+B = 1)$	$\vdash$ a) aus 25)
(2)	$(\bar{A}+B) = (\bar{A}+B = 1)$	$\vec{u}$)
(3)	$(\bar{A}+B = 1) = (\bar{A}+B)$	24) aus (2)
(4)	$(A \leq B) = (\bar{A}+B)$	24) aus (1), (3)

27_u) $A \leq (B \leq C) \dashv\vdash AB \leq C$

Wenn man $A \leq B$ urteilslogisch mit "Wenn A, dann B" übersetzt, dann besagen die beiden letzten Sätze folgendes:
26_u): "Wenn A, dann B" bedeutet dasselbe wie "Nicht-A oder B"
27_u): Eine gestaffelte Wenn-Dann-Behauptung "Wenn A, dann: Wenn B, dann C" läßt sich äquivalent umformen in "Wenn A <u>und</u> B, dann C".

<u>Äquivalenzbeweis</u> von $BGS_u^{\vdash}$ und APL

a) Zum Nachweis von $BGS_u^{\vdash} \leq$ APL sind lediglich die Formeln 4.1 bis 4.3 und die Regel 4.6 zu übersetzen und in $BGS_u^{\vdash}$ abzuleiten, da die Axiome 4.4 bis 4.8 wörtliche Übersetzungen von 2.2', 2.3' und 2.8', 2.9' in $BGS_u^{\vdash}$ sind.

<u>4.1</u> $A \leq (B \leq A)$

Beweis:

(1)	$AB \leq A$	2.2
(2)	$A \leq (B \leq A)$	27_u) aus (1)

<u>4.2</u> $(A \leq (B \leq C)) \leq ((A \leq B) \leq (A \leq C))$

Beweis:

(1)	$A \leq A$	2.1
(2)	$A \leq B$	Ann.
(3)	$A \leq AB$	2.8 aus (1), (2)
(4)	$AB \leq C$	Ann.
(5)	$A \leq C$	2.6 aus (3), (4)
(6)	$(A \leq B)(AB \leq C) \leq (A \leq C)$	$\vdash$ a) aus (2), (4), (5)
(7)	$(A \leq B)(AB \leq C) = (AB \leq C)(A \leq B)$	5)
(8)	$(AB \leq C)(A \leq B) \leq (A \leq B)(AB \leq C)$	2.7 aus (7)
(9)	$(AB \leq C)(A \leq B) \leq (A \leq C)$	2.6 aus (6), (8)
(10)	$(AB \leq C) \leq ((A \leq B) \leq (A \leq C))$	27_u) aus (9)
(11)	$A \leq (B \leq C)$	Ann.
(12)	$AB \leq C$	27_u) aus (11)
(13)	$(A \leq (B \leq C)) \leq (AB \leq C)$	$\vdash$ a) aus (11), (12)
(14)	$(A \leq (B \leq C)) \leq ((A \leq B) \leq (A \leq C))$	2.6 aus (10), (13)

<u>4.3</u> $(\bar{A} \leq \bar{B}) \leq (B \leq A)$

<u>4.6</u> $A, A \leq B \vdash B$

Zusammen mit den Beweisen von 4.3 und 4.6 ist damit $BGS_u^{\vdash} \leq$ APL nachgewiesen.

b) Der Nachweis von APL $\leq BGS_u^{\vdash}$ ist trivial.
Für 2.2', 2.3'; 2.8', 2.9'; Sp), Sp') ist nichts zu zeigen, da diese Axiome beiden Kalkülen gemeinsam sind.
Übersetzt man die übrigen Axiome von $BGS_u^{\vdash}$ in die Symbolik von APL, wobei für 1 $A \Rightarrow A$ und für 0 $\neg(A \Rightarrow A)$ zu wählen

ist, dann zeigt sich, daß die Grundformeln 2.1 bis 2.5 Tautologien sind und die Grundregeln 2.6 bis 2.9, u), $\vdash$ b) stets von tautologischen Prämissen zu ebensolchen Konklusionen führen. Daraus folgt, daß auch die Regel $\vdash$ a) nur tautologische Formeln liefert.

Damit sind in der Übersetzung von $BGS_u^{\vdash}$ <u>nur</u> Tautologien ableitbar. Da APL vollständig ist, also <u>alle</u> Tautologien ableitet, ist damit APL $\underline{\angle}$ $BGS_u^{\vdash}$ erwiesen.

Hier endet der Äquivalenzbeweis.

Wir merken noch folgendes an:

1. Für den eben gegebenen Äquivalenzbeweis braucht man in $BGS_u^{\vdash}$ nur die Spezialfälle n = 1, n = 2 der <u>Deduktionsregel</u> $\vdash$ a) vorauszusetzen. Also: $\dfrac{A_1 \vdash B}{A_1 \underline{\angle} B}$ und $\dfrac{A_1, A_2 \vdash B}{A_1A_2 \underline{\angle} B}$

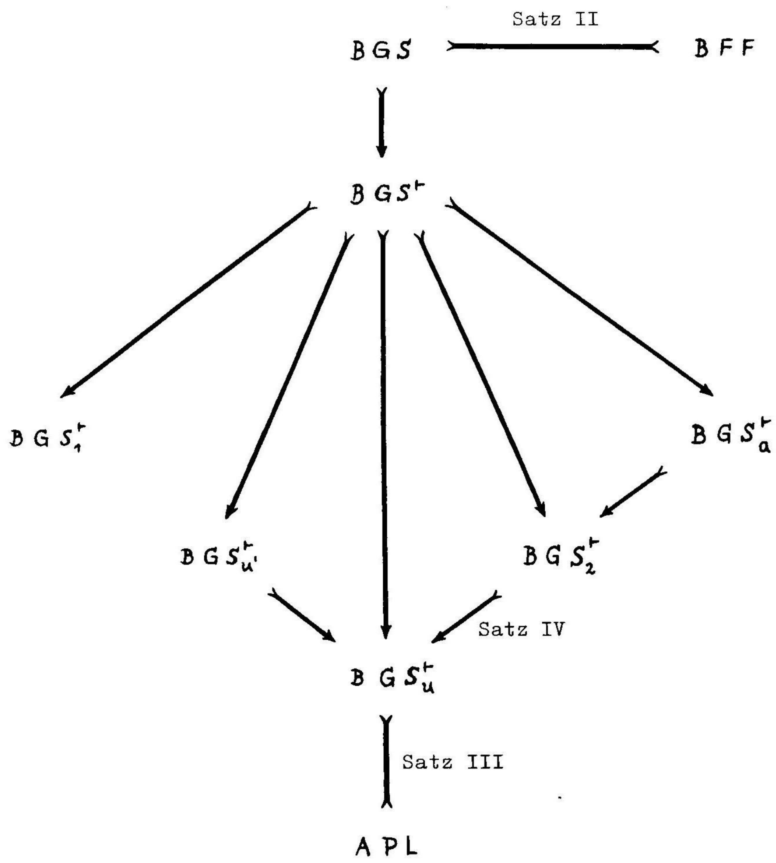
2. Auf die <u>Abtrennungsregel</u> $\vdash$ b) kann man sogar ganz verzichten, da sie für den Fall n = 1: $\dfrac{A_1, A_1 \underline{\angle} B}{B}$ schon aus der Regel u) folgt (s. o. 4.6).

Mit Hilfe des urteilslogischen Satzes 27_u): $A_1A_2 \underline{\angle} B \dashv\vdash A_1 \underline{\angle} (A_2 \underline{\angle} B)$ ergibt sich daraus der Fall n = 2: $\dfrac{A_1, A_2, A_1A_2 \underline{\angle} B}{B}$ und falls man Satz 27_u) auf beliebiges n verallgemeinert, auch die allgemeine Form der Abtrennungsregel, also $\vdash$ b).

Für urteilslogische Kalküle ist also der Fall n = 1 der Abtrennungsregel ausreichend, was begriffslogisch nicht gilt. Hier sind mindestens die Fälle n = 1 und n = 2 erforderlich.

Wir wollen unsere bisherigen Ergebnisse durch ein Diagramm graphisch veranschaulichen und zusammenfassen.

§ 3 Graphische Darstellung der bisherigen Ergebnisse



Das Diagramm zeigt die wichtigsten Abkömmlinge der Begriffslogik, hier entwickelt auf der Grundlage des Kalküls BGS. Alle Kalküle beschreiben Boolesche Algebren mit verallgemeinerten Operationen.

BGS, $BGS^{\vdash}$ sind Kalküle der Reinen Begriffslogik.
$BGS^{\vdash}$ entsteht aus BGS durch die zusätzlichen Regeln:

$\vdash$ a) Deduktionsregel
$$\frac{A_1, \ldots, A_n \vdash B}{A_1 \ \ldots \ A_n \leq B}$$

$\vdash$ b) Abtrennungsregel
$$\frac{A_1, \ldots, A_n \qquad A_1 \ \ldots \ A_n \leq B}{B}$$

$BGS^{\vdash}_a$ der Kalkül der Angewandten Begriffslogik, beschreibt eine atomare Boolesche Algebra.
Zusatzregel gegenüber $BGS^{\vdash}$:

a) $$\frac{a^I \not\leq b}{b = 0}$$

$BGS^{\vdash}_2$ beschreibt eine zweiwertige bzw. zwei-elementige Boolesche Algebra. Zusatzregel gegenüber $BGS^{\vdash}$:

0/1) $$\frac{a = 0}{a \neq 1} \qquad \frac{a \neq 1}{a = 0}$$

$BGS^{\vdash}_u$ Kalkül der (vollen) Urteilslogik.
Zusatzregel gegenüber $BGS^{\vdash}$:

u) $$\frac{A}{A = 1} \qquad \frac{A = 1}{A}$$

In dieser Übersicht tauchen zwei noch nicht besprochene Kalküle auf: $BGS^{\vdash}_1$ und $BGS^{\vdash}_{u'}$.
$BGS^{\vdash}_1$ entsteht aus $BGS^{\vdash}$ durch Zusatz der Grundformel:

s) $1 = 0$ bzw. $1 \leq 0$ (s) als Abkürzung für singulär)

Dieser Kalkül beschreibt eine singuläre (= einelementige) Boolesche Algebra und vertritt logisch sozusagen die "leere Welt", da hier "alles (1) nichts (0) ist".
Der Kalkül $BGS^{\vdash}_{u'}$ besitzt dieselbe Zusatzregel wie $BGS^{\vdash}_u$. Diese darf hier jedoch nur auf Beziehungsformeln angewandt werden, also auf Formeln, die mindestens ein $\leq$ oder ein $=$ enthalten.
Wir bezeichnen $BGS^{\vdash}_{u'}$ als Kalkül der Gemischten Begriffslogik im Gegensatz zu Kalkülen bis hin zur Stärke von $BGS^{\vdash}$, die Kalküle der Reinen Begriffslogik heißen.
Man kann jeden Begriffskalkül durch die Regel u') verstärken. Es gilt dann auf der Ebene der Beziehungsformeln die volle Urteilslogik, während die übrigen Formeln nur den jeweiligen begriffslogischen Gesetzen unterliegen. Dieser Gedanke soll hier jedoch nicht weiter verfolgt werden.

Die Art-Gattungs-Beziehungen zwischen den BGS-Kalkülen im Diagramm ergeben sich i. a. von selbst, da meistens die spezielleren Kalküle aus den allgemeineren durch Erweiterung des Axiomensystems entstehen. Die Begründung für die Beziehungen zwischen $BGS^{\vdash}_u$ und $BGS^{\vdash}_2$ sowie zwischen $BGS^{\vdash}_2$ und $BGS^{\vdash}_a$ werden wir im folgenden noch nachtragen.
Daß es sich jeweils um echte Verstärkungen handelt, das Zeichen $\longleftarrow$ also zu Recht zwischen zwei Kalkülen steht, be-

weist man am einfachsten durch die Angabe einer Formel, die zwar im stärkeren, nicht aber im schwächeren Kalkül ableitbar ist.

Zum Beweis von Satz IV: $BGS^{\vdash}_{u} \leq BGS^{\vdash}_{2}$ ist die Regel 0/1) in $BGS^{\vdash}_{u}$ abzuleiten (vgl. S. 44):

$$\dfrac{{\scriptstyle 2.6}\dfrac{{\scriptstyle 2.7}\dfrac{\overset{\tilde{u})}{A=(A=1)}}{A\leq(A=1)}\qquad {\scriptstyle 2.6}\dfrac{{\scriptstyle 15)}\dfrac{{\scriptstyle 2.7}\dfrac{{\scriptstyle u)}\dfrac{\overset{\text{Ann.}}{A\neq 1}}{(A\neq 1)=1}}{1\leq(A\neq 1)}}{(A=1)\leq\bar{1}}\quad {\scriptstyle 2.7}\dfrac{\overset{15')}{\bar{1}=0}}{\bar{1}\leq 0}}{(A=1)\leq 0}}{A\leq 0}\qquad \overset{2.5}{0\leq A}}{A=0}\,{\scriptstyle 2.6}$$

$$\dfrac{\dfrac{{\scriptstyle 2.6}\dfrac{{\scriptstyle 2.7}\dfrac{\overset{15')}{\bar{0}=1}}{1\leq\bar{0}}\qquad {\scriptstyle 15)}\dfrac{{\scriptstyle 2.6}\dfrac{{\scriptstyle 2.7}\dfrac{\overset{\tilde{u})}{A=(A=1)}}{(A=1)\leq A}\quad {\scriptstyle 2.7}\dfrac{\overset{\text{Ann.}}{A=0}}{A\leq 0}}{(A=1)\leq 0}}{\bar{0}\leq(A\neq 1)}}{1\leq(A\neq 1)}\qquad \overset{2.5}{(A\neq 1)\leq 1}}{(A\neq 1)=1}\,{\scriptstyle 2.6}}{A\neq 1}\,{\scriptstyle u)}$$

Umgekehrt sieht man leicht, daß zB. die Formel $a+\bar{a}$ $(A+\bar{A})$ zwar in $BGS^{\vdash}_{u}$ (mit Hilfe von Theorem 14) und Regel u)), nicht aber in $BGS^{\vdash}_{2}$ ableitbar ist. Es gilt demnach: $BGS^{\vdash}_{u} \longleftarrow BGS^{\vdash}_{2}$.

Die Urteilslogik ist also eine <u>spezielle</u> zweiwertige Begriffs logik. Die Zweiwertigkeit allein - ausgedrückt etwa durch die Regel 0/1) - macht's noch nicht !

Daß nun die zweiwertige Begriffslogik eine angewandte ist, ergibt sich so:

Da innerhalb von $BGS^{\vdash}_{2}$ die 1 das einzige Individuum ist, m. a. W. alle Individuen gleich 1 sind, läßt sich die Regel a) hier ohne weiteres ableiten.

$$\dfrac{{\scriptstyle 2.6}\dfrac{{\scriptstyle 15)}\dfrac{{\scriptstyle 2.6}\dfrac{{\scriptstyle 2.7}\dfrac{{\scriptstyle 0/1')}\dfrac{\overset{\mathrm{I}1)}{c^{I}\neq 0}}{c^{I}=1}}{1\leq c^{I}}\qquad \dfrac{\overset{\text{Ann.}}{c^{I}\neq b}}{c^{I}\leq\bar{b}}\,{\scriptstyle 20^{I})}}{1\leq\bar{b}}}{b\leq\bar{1}}\qquad {\scriptstyle 2.7}\dfrac{\overset{15')}{\bar{1}=0}}{\bar{1}\leq 0}}{b\leq 0}\qquad \overset{2.5}{0\leq b}}{b=0}\,{\scriptstyle 2.7}$$

Andererseits kann aber die Regel a) der Angewandten Begriffslogik nicht die Regel 0/1) der zweiwertigen Begriffslogik zur Folge haben, da man sich leicht einen Booleschen Verband aus vier verschiedenen Elementen konstruieren kann, der dann trivialerweise atomar ist.

Daher gilt also die Beziehung $BGS^{\vdash}_{2} \longleftarrow BGS^{\vdash}_{a}$.

Damit sind nun alle im Diagramm verzeichneten logischen Beziehungen zwischen den Kalkülen nachgewiesen.

§ 4 Zusammenfassung

Im vorangehenden Kapitel haben wir die Hierarchie der begriffslogischen Kalküle weiter ausgebaut und die Beziehungen dieser Formalismen untereinander in vieler Hinsicht geklärt.
Dabei erwies sich die durch ein besonderes Urteilsprinzip verstärkte Reine Begriffslogik als äquivalent zur Aussagen- und Prädikatenlogik (erster Stufe).
Kurz gesagt: Reine Begriffslogik plus Urteilsprinzip ergibt die Urteilslogik, die einen besonders wichtigen unter den verschiedenen Abkömmlingen der Begriffslogik darstellt.
Ihre Sonderstellung zeigt sich rein syntaktisch schon daran, daß hier nicht nur - wie bei den anderen Logikkalkülen - jedes Beziehungszeichen auch als Verknüpfungszeichen verwendet wird, sondern sogar die Umkehrung gilt: Jedes Verknüpfungszeichen tritt auch als Beziehungszeichen auf.
Dies unterscheidet die Urteilslogik insbesondere auch von der etwa durch den Kalkül $BGS^{\vdash}_{2}$ repräsentierten zweiwertigen Begriffslogik.
Ein interessantes Zwischenglied zwischen Reiner Begriffs- und voller Urteilslogik bildet der Kalkül der Gemischten Begriffslogik $BGS^{\vdash}_{u'}$. Er gibt die Möglichkeit, Beziehungsformeln wie Urteile, alle übrigen Formeln aber lediglich wie Begriffe zu behandeln.

Mit der erwähnten Hierarchie der Kalküle ist unsere "Weltanschauung" - wenigstens was logische Probleme betrifft - genügend scharf umrissen: Wir werden in Zukunft bei der Behandlung von mehr philosophischen Fragen oder Grundlegungs-

problemen der Einzelwissenschaften zunächst einmal die Position der Reinen Begriffslogik einnehmen und nur in besonderen Fällen auf die spezielleren Kalküle zurückgreifen.
Argumente, die offen oder versteckt von spezielleren Voraussetzungen etwa der Angewandten oder der Urteilslogik Gebrauch machen, müssen daher genau geprüft werden.
Das wird insbesondere bezüglich der intuitionistischen Kritik am Tertium-non-datur einschneidende Folgen haben.

VI. Exkurse

§ 1 Übersicht

Im Anschluß an unsere Betrachtung begriffslogischer und urteilslogischer Kalküle ergibt sich eine rein logische Lösung des sog. Antinomienproblems. Eine genaue Analyse der im Zusammenhang mit Antinomien auftretenden Argumentationen zeigt, daß es echte Antinomien nicht gibt. Dh. aus tatsächlich widerspruchsfreien Prämissen kann nicht auf korrekte Weise ein Widerspruch gefolgert werden. Bei jeder der bekannten sog. Antinomien steckt ein i. a. nicht auf den ersten Blick zu entdeckender Widerspruch schon im Ansatz. Die hier vorliegenden Verhältnisse können mit Hilfe der Logik allein völlig aufgeklärt werden. Die heute üblicherweise vorgeschlagenen Vorkehrungen zur Verhinderung antinomischer Prämissen oder Begriffsbildungen sind überflüssig. Das hat Folgen insbesondere für die Axiomatische Mengenlehre und die Grundlegung der Mathematik.

Eine weitere Überlegung beschäftigt sich mit der Kritik der sog. Intuitionisten am Satz vom Ausgeschlossenen Dritten. Wir werden zeigen, daß die in diesem Zusammenhange vorgebrachten üblichen Argumente von der Position der Reinen Begriffslogik aus betrachtet nicht zwingend sind, da sie stillschweigende Voraussetzungen machen, die nur in spezielleren Logiksystemen gelten.

§ 2 Zum Antinomienproblem

Ohne auf die umfangreiche Literatur zur Geschichte und Bedeutung der Antinomien einzugehen, wollen wir hier nur auf eine Möglichkeit hinweisen, das Antinomienproblem mit Hilfe der bereitgestellten Kalküle rein logisch zu lösen.

Man spricht von einer Antinomie, wenn sich aus anscheinend widerspruchsfreien Prämissen auf korrekte Weise ein offensichtlicher Widerspruch folgern läßt. Daß hier in Wirklichkeit schon die Prämissen einen wenn auch versteckten Widerspruch enthalten, es sich also tatsächlich nicht um eine Antinomie im echten Sinne, sondern höchstens um eine Paradoxie handelt, werden wir allgemein und auch an einzelnen Beispielen zeigen.

Wir behandeln zunächst den schon in der Antike bekannten "Lügner", der sich formulieren läßt als: "Was ich jetzt sage, ist falsch". Nimmt man nun an, diese Behauptung sei wahr, so folgt ihre Falschheit; nimmt man an, sie sei nicht wahr, also falsch, so folgt wieder das Gegenteil.

Die Antinomie läßt sich folgendermaßen in den Kalkül $BGS_u^{\vdash}$ übersetzen:

L = (Was ich jetzt sage, ist falsch)

"Was ich jetzt sage ..." ist aber gerade der Satz L selbst. Also:

L = (L ist falsch)

"L ist falsch" wird im urteilslogischen Kalkül $BGS_u^{\vdash}$ durch $L = 0$ ausgedrückt, so daß der "Lügner" folgende Form annimmt:

$L = (L = 0)$.

Die dazugehörige Argumentation zeigt nun folgendes:

$L = (L = 0),\ L = 1 \ \vdash\ L \neq 1$

$L = (L = 0),\ L \neq 1 \ \vdash\ L = 1$

Offenbar wird dabei völlig korrekt geschlossen:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{\text{Ann.}}{L = (L = 0)}}{(L = 0) = L}\,24) \qquad \overset{\text{Ann.}}{L = 1}}{(L = 0) = 1}\,24)}{L = 0}\,u)}{L \neq 1}\,0/1)$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{\text{Ann.}}{L = (L = 0)}}{(L = 0) = L}\,24) \qquad \dfrac{\overset{\text{Ann.}}{L \neq 1}}{L = 0}\,0/1)}{(L = 0) = 0}\,24)}{(L \neq 0) = \bar{0}}\,15) \qquad \bar{0} = 1}{(L \neq 0) = 1}\,24)}{L \neq 0}\,u)}{L = 1}\,0/1)$$

Und zwar nach dem Schema $\quad A,\ B \ \vdash\ \bar{B}$

$\quad A,\ \bar{B} \ \vdash\ B.$

Ohne Rücksicht auf den speziellen Inhalt der Prämisse A folgt in dieser Situation - wie im Anhang bewiesen wird -, daß A widersprüchlich ist, also: $A = 0$.

Im Falle des "Lügners" läßt sich auch noch auf andere Weise zeigen, daß die antinomische Prämisse $L = (L = 0)$ widersprüchlich bzw. die Negation eines logischen Theorems ist.

Zum Beweis dieser Tatsache benötigen wir folgende Hilfssätze:

28) $\quad a \leq b,\ a \neq b \ \vdash\ b \neq a$

29) $\quad a = b,\ a \neq c \ \vdash\ b \neq c$

$\quad a \neq c,\ b = c \ \vdash\ a \neq b$

$30_u) \quad \vdash\ (A = \bar{A}) = 0,\ \ A \neq \bar{A}$

$31_u) \quad \vdash\ \bar{A} = (A = 0)$

Der Beweis, daß der "Lügner" schon im Ansatz einem logischen Theorem widerspricht, sieht nun so aus:

$$\dfrac{\overset{30_u)}{L \neq \bar{L}} \qquad \dfrac{\overset{31_u)}{\bar{L} = (L = 0)}}{(L = 0) = \bar{L}}\,24)}{L \neq (L = 0)}\,29)$$

Das aber ist die Negation von $L = (L = 0)$.

Außerdem folgt noch ohne weiteres:

$(L = (L = 0)) = 0.$

Wir haben nun gezeigt, daß die eigentlich antinomische Prämisse in der "Lügner"-Argumentation die Negation eines urteilslogischen Theorems oder - was urteilslogisch dasselbe bedeutet - einfach widersprüchlich ist.

Läßt man in dem Schlußschema $A,\ B \ \vdash\ \bar{B};\ \ A,\ \bar{B} \ \vdash\ B$ die Prämisse A unter den Tisch fallen, so gelangt man zu der irrtümlichen Ansicht, es lägen die Ableitbarkeitsbeziehungen $B \ \vdash\ \bar{B}$ und $\bar{B} \ \vdash\ B$ vor, womit dann $B = \bar{B}$ innerhalb der Logik ableitbar wäre.

Urteilslogisch wäre dies ein Widerspruch, da ja urteilslogisch $\vdash\ B \neq \bar{B}$ gilt. Begriffslogisch wäre jedoch auch dies noch kein Widerspruch, wie der widerspruchfreie Kalkül $BGS_1^{\vdash}$ zeigt.

In der Sprache der üblichen Aussagenlogik läßt sich der "Lügner" so schreiben:

$L \Leftrightarrow (L \Leftrightarrow A \wedge \neg A)$ $\qquad$ $A \wedge \neg A$ oder auch $\neg(A \Rightarrow A)$ entspricht der 0 in $BGS^{\vdash}_{u}$.

Man kann leicht nachrechnen, daß es sich hier um eine immerfalsche Formel, eine Kontradiktion, handelt.
Die der Formel ü) entsprechenden Formeln $L \Leftrightarrow (L \Leftrightarrow A \vee \neg A)$ bzw. $L \Leftrightarrow (L \Leftrightarrow (A \Rightarrow A))$ dagegen erweisen sich als Tautologien, aussagenlogische Theoreme.
Über L selbst folgt dabei gar nichts, weder $L = 1$ noch $L = 0$.
Formt man das Schlußschema $A, B \vdash \bar{B}$; $A, \bar{B} \vdash B$ urteilslogisch äquivalent um zu $A \vdash B = \bar{B}$, so ist freilich aus der Prämisse A der urteilslogische Widerspruch $B = \bar{B}$ ableitbar. Da sich aber A – in unserem Falle die Formel $L = (L = 0)$ – auch auf anderem Wege als widersprüchlich herausgestellt hat, ist hier logisch alles in Ordnung. Die ganze Situation hat eigentlich nichts Antinomisches mehr an sich. Jedenfalls wurde nicht aus tatsächlich widerspruchsfreien Prämissen ein Widerspruch abgeleitet.
Damit ist die sog. "Lügner"-Antinomie rein logisch aufgeklärt und die heute üblichen Erklärungsversuche dürften sich als hinfällig erwiesen haben. Die Antinomie hat ihren Grund insbesondere weder in der Besonderheit eines irgendwie definierten Wahrheitsbegriffes, noch in einer durch Rückbezüglichkeit bzw. Zirkularität zustande gekommenen Vermengung von Sprachschichten, sondern lediglich in der Widersprüchlichkeit ihrer entscheidenden Prämisse.

Daraus ergibt sich, daß alle methodologischen Forderungen, die man aus dem Auftreten der Lügnerantinomie glaubte ableiten zu müssen, wie strenge Unterscheidung von Sprachschichten etc., vollständig überflüssig sind.
Will man unbedingt von Sprachschichten sprechen, so könnte man sagen, daß Formeln der Gestalt $A = B$, $A \neq B$ den Formeln A, B gegenüber der nächst höheren Schicht angehören. Hier gilt jedoch auf jeder Schicht dieselbe Logik. Außerdem können Formeln verschiedener Schichten durchaus äquivalent sein, wie etwa A und $A = 1$ in der Urteilslogik.
Dies führt zu einer weitgehenden Vereinfachung der Philosophie der Logik und der Sprache.
Argumente, die von der Lügnerantinomie wesentlichen Gebrauch machen, sollten jeweils einer genauen Kontrolle unterzogen werden, da sie vermutlich nicht stichhaltig sind.
Doch wollen wir dies hier nicht durchführen.

Ähnlich ist die Lage bei den Antinomien von Russell und Grelling.
Hier wird eine Menge bzw. ein Begriff auf widerspruchsvolle Weise definitorisch eingeführt.
Bei der Russellschen Antinomie geht man davon aus, daß sich beliebig große Mengen, also Mengen von Elementen, Mengen von Mengen etc. bilden lassen. Andererseits hat man, so wird allgemein angenommen, zu jeder beliebigen Eigenschaft eine zugehörige Menge, die genau diejenigen Individuen enthält, denen die betreffende Eigenschaft zukommt.
Normalerweise wird es so sein, daß sich eine Menge nicht selbst als Element enthält. Dies gilt z. B. für die üblichen Mengen

der Mathematik: Zahlen, Funktionen, Punkte etc. Die Menge der natürlichen Zahlen ist ja selbst keine natürliche Zahl, enthält sich also nicht als Element.
Wählt man die eine Menge konstituierende Eigenschaft sehr allgemein, so kann es vorkommen, daß sich eine Menge nun selbst als Element enthält; zB. gilt das von der Menge "aller denkbaren Dinge". Diese ist selbst denkbar, somit ihr eigenes Element.
Russell bildet nun die "Menge aller der Dinge, die sich nicht selbst als Element enthalten".
Ein x gehört zu dieser Menge - sie heiße r - genau dann, wenn es sich nicht selbst als Element enthält. In Formeln:

$$\bigwedge x\ (x \in r \Leftrightarrow \neg(x \in x))$$

Hieraus folgt nun sehr schnell ein Widerspruch:

(1) $\bigwedge x\ (x \in r \Leftrightarrow \neg(x \in x)) \Rightarrow (r \in r \Leftrightarrow \neg(r \in r))$ 4.4

(2) $\bigwedge x\ (x \in r \Leftrightarrow \neg(x \in x))$ Ann.

(3) $r \in r \Leftrightarrow \neg(r \in r)$ 4.6 aus (1),(2)

Die Argumentation hat also die Form: $A \vdash B = \bar{B}$.
Sie läßt sich natürlich auch auf das Schema $A, B \vdash \bar{B}$; $A, \bar{B} \vdash B$ bringen. Man fragt dann: Gilt $r \in r$ oder $\neg(r \in r)$?
Bei der Russellschen Antinomie liegt der Fehler darin, daß die Menge r nach einem Schema definiert wurde, das eine logische Kontradiktion enthält. Ein solches r kann es nämlich

aus rein logischen Gründen gar nicht geben; und zwar ganz unabhängig von der Natur der dabei auftretenden zweistelligen Relation. Es gilt der allgemeine Satz:[28)]

32_u) $\neg \bigvee y \bigwedge x\ (Axy \Leftrightarrow \neg(Axx))$

$$\sum_y \prod_x (A_{xy} = \overline{A_{xx}}) = 0$$

Die Definition der Russellschen Menge aber hat gerade das Gegenteil dieses Satzes zur Folge, im Spezialfall $\in$ für A:

$$\bigwedge x\ (x \in r \Leftrightarrow \neg(x \in x)) \Rightarrow \bigvee y \bigwedge x\ (x \in y \Leftrightarrow \neg(x \in x))$$ 4. 5

Auch hier zeigt sich, daß weder eine besondere Unart der Element-Beziehung für die Antinomie verantwortlich ist, noch die Nichtbeachtung gewisser Mengenschichten, wie sie zB. in der Russellschen Typentheorie gefordert werden. Diese verhindert zwar das Auftreten der erwähnten Antinomie, erklärt es aber nicht.
Doch liegt der Grund für die Antinomie mit im sog. <u>Komprehensionsschema</u>, nach dem die Menge gebildet wurde:

K) $\bigvee y \bigwedge x\ (x \in y \Leftrightarrow F(x))$ für beliebige Eigenschaften F.

Die Annahme, hier läge der Grund für die Antinomie, ist weit verbreitet. So nehmen so gut wie alle axiomatischen Mengenlehren - neben anderen Einschränkungen - eine Veränderung des Komprehensionsschemas vor, um die Russellsche Antinomie zu verhindern.[29] Bei v. Neumann unterscheidet man zwischen Klassen und Mengen und formuliert den inneren Teil der Formel so:

$$x \in y \Leftrightarrow F(x) \wedge Mg(x), \text{ wobei } Mg(x) \text{ bedeutet: } x \text{ ist Menge.}$$

Zermelo faßt das Komprehensionsschema als "Aussonderungsaxiom" für Teilmengen schon vorgegebener Mengen auf:

$$x \in y \Leftrightarrow F(x) \wedge x \in A, \text{ wobei } A \text{ die vorgegebene Menge ist.}$$

Diese Tricks beseitigen die Antinomie und führen nicht auf die widersprüchliche Konsequenz $r \in r \Leftrightarrow \neg(r \in r)$ im Falle der Russellschen Konstruktion, sondern zB. bei v. Neumann auf die Folgerung, daß r keine Menge sein kann: $\neg\, Mg(r)$.

Letztlich ist das Komprehensionsschema für das Auftreten der Russellschen Antinomie verantwortlich, es ist nämlich nicht allgemeingültig in dem Sinne, daß es zu jeder beliebigen Eigenschaft, genauer: zu jedem Kollektiv, ein Mengen-Individuum gäbe, das genau die unter die betreffende Eigenschaft fallenden Individuen als Elemente enthält. Das sieht man am Beispiel der Russellschen Eigenschaft "sich nicht selbst als Element enthaltend": $\neg(x \in x)$, die nicht widersprüchlich ist - jede endliche Menge hat zB. diese Eigenschaft -, zu der es aber aus rein logischen Gründen die zugehörige Menge, die Russellsche "Menge", nicht gibt.

An dieser Stelle fragt man sich wiederum, - wenn schon die Mengenlehre zur Grundlegung der Mathematik taugt, aber wegen der ungenügenden Allgemeinheit des Mengenbegriffs Schwierigkeiten macht -, ob es nicht möglich ist, die ganze Mathematik auf begriffslogische Füße zu stellen, von den Mengen, deren Existenz ja nicht in jedem Falle gesichert werden kann, Abschied zu nehmen und als neue Grundlage die Theorie der Kollektive zu wählen.[30]
Zumindest bei unendlichen Gesamtheiten hat ja der Begriff gegenüber der Menge ohnehin einen Vorrang. Denn er bestimmt, was zur Menge gehört und was nicht. Die Menge muß ja gewissermaßen erst nachträglich gebildet werden.[31] Für die Grundlegung der Mathematik, aber auch für die mathematische Praxis scheint die Voraussetzung von Individuen und Kollektiven zu genügen. Darüber hinaus noch die Existenz von Mengen zu fordern, dürfte überflüssig sein.
Vielleicht hat Cantor selbst unter "Menge" gerade unser "Kollektiv" verstanden. Aus dem "Paradies der Kollektive" braucht man sich nämlich - um frei mit Hilbert zu reden - nicht vertreiben zu lassen, da dessen Widerspruchsfreiheit trivial gesichert ist, etwa durch das Beispiel der zweiwertigen Begriffsalgebra.

Hinter der Antinomie von Grelling steckt dasselbe logische Schema wie hinter Russells Konstruktion. Nur sieht sie mehr "semantisch" aus, weil zu ihrer Formulierung die Bedeutungsrelation benutzt wird.
Bei den Wörtern einer Sprache kann man fragen, ob die Bedeu-

tung eines bestimmten Wortes auf dieses Wort selbst zutrifft oder nicht. So ist zB. das Wort "dreisilbig" selbst dreisilbig, "einsilbig" dagegen ist nicht einsilbig. Wörter, auf die ihre eigene Bedeutung zutrifft, heißen autolog, die übrigen heißen heterolog.
Führt man xZy als Abkürzung ein für: "Die Bedeutung des Zeichens y trifft auf das Zeichen x zu", so kann man "heterolog" (h) definieren durch:

$\bigwedge x\ (xZh \Leftrightarrow \neg(xZx))$

und daraus folgt sofort - analog wie bei Russell:

$hZh \Leftrightarrow \neg(hZh)$.

Auch hier finden wir: Für den offensichtlichen Widerspruch ist weder die Bedeutungsrelation Z, noch die Nichtunterscheidung von Sprachschichten etc. verantwortlich. Derselbe logische Fehler wie bei Russells Antinomie erzeugt den Widerspruch.
Ähnliche Analysen könnte man auch für die vielen anderen bekannten Antinomien wie etwa die von Richard, Quine, Shen Yuting u. a. vornehmen. Wir wollen das hier jedoch nicht tun. Man kann ganz allgemein Antinomien erzeugen, indem man in Argumentationen Prämissen verwendet, die logischen Theoremen widersprechen.
Zum Abschluß dieser skizzenhaften Bemerkungen kann man sagen, daß die heute für so wichtig gehaltenen Vorkehrungen zur Verhinderung von Antinomien innerhalb der Mathematik, aber auch in der Logik und Sprachphilosophie überflüssig

sind und diese Disziplinen nur unnötig komplizieren. Die daran anschließenden Betrachtungen über die philosophische Tragweite der Antinomien dürften zum größten Teil hinfällig sein. Was speziell die mathematische Logik betrifft, so müssen hier Beweise, die wesentlichen Gebrauch von antinomischen oder antinomie-ähnlichen Konstruktionen machen, in Zukunft mit äußerster Skepsis betrachtet und überprüft werden.

Grundsätzlich muß man bei jedem Widerspruch unterscheiden, ob er
a) in einem (Logik-)Kalkül formulierbar,
b) in einem (Logik-)Kalkül ableitbar oder
c) in einem (Logik-)Kalkül hypothetisch ableitbar ist.

In allen betrachteten Fällen trafen a) und c) zu, nicht aber b). Der "Lügner" war innerhalb der Urteilslogik formulierbar, Russells und Grellings Konstruktionen konnten in einer durch geeignete Zeichen erweiterten Urteilslogik ausgedrückt werden. Die auftretenden Widersprüche waren jedoch in den genannten Kalkülen nur unter Verwendung einer bereits widersprüchlichen Prämisse ableitbar.

Ganz allgemein sieht man die Unmöglichkeit echter Antinomien im anfangs erwähnten Sinne so ein: Wenn aus den Prämissen P_1, ... P_n ein Widerspruch ableitbar ist, etwa sowohl A als auch $\bar{A}$, dann gilt gemäß Regel $\vdash$ a), S. 41, $\vdash P_1 \ldots P_n = 0$ als logisches Theorem. Dem widerspräche dann die Annahme, die Prämissen seien tatsächlich verträglich, es gelte also
$P_1 \ldots P_n \neq 0$.

§ 3 Zur intuitionistischen Kritik am Tertium-non-datur

Die folgenden Bemerkungen laufen darauf hinaus, daß die übliche Kritik am Tertium-non-datur von der Position der Reinen Begriffslogik aus nicht geführt werden kann, weil sie stärkere Voraussetzungen, insbesondere die der Angewandten Logik, zugrunde legt.
Bevor wir auf dieses Problem näher eingehen, wollen wir uns noch einige kalkültechnische Hilfsmittel verschaffen. Sie betreffen die Zeichen $\prod$ und $\sum$, die bisher nur in Verbindung mit indizierten Formeln auftraten und deren Bedeutung im Kalkül durch die Axiome 2.2', 2.3', 2.8', 2.9' und Sp') festgelegt war. Wir wollen nun Produkte und Summen einführen, die sich auf beliebige Formeln beziehen.
In den folgenden Axiomen sei f(x) eine die freie Variable x enthaltende Formel, aus der f(y) dadurch entsteht, daß man x überall durch die Formel y ersetzt.

Grundformeln

2.2" $\prod\limits_x f(x) \leq f(y)$

2.3" $f(y) \leq \sum\limits_x f(x)$

Grundregeln

2.8" $\dfrac{a \leq f(x)}{a \leq \prod\limits_x f(x)}$

2.9" $\dfrac{f(x) \leq a}{\sum\limits_x f(x) \leq a}$

In a darf x nicht frei vorkommen.

Sp") Variablen dürfen durch beliebige andere ersetzt werden. Dabei müssen freie Variablen frei bleiben und bei gebundenen darf sich die Bindung nicht ändern.

Gab es bisher freie und gebundene Indizes, jedoch nur freie Variablen, so haben wir es jetzt auch noch mit gebundenen Variablen zu tun. "Frei" und "gebunden" ist dabei ganz analog wie bei Indizes definiert.[32)]
Man erhält so einen ausdrucksstärkeren Kalkül, der - was hier nicht weiter verfolgt werden soll - in enger Beziehung zur sog. Prädikatenlogik zweiter und höherer Stufe steht, während die bisherige Indexschreibweise den Ausdrucksmitteln der Prädikatenlogik erster Stufe angepaßt war.

Vorweg sei bemerkt, daß man die Logik selbstverständlich auch so aufbauen kann, daß in ihr der Satz vom Ausgeschlossenen Dritten nicht gilt, also begriffslogisch die Formel $a+\bar{a} = 1$, urteilslogisch die Formel $A+\bar{A}$ nicht ableitbar ist oder - was auf dasselbe hinausläuft - der Satz der Doppelten Verneinung $a = \bar{\bar{a}}$ nicht allgemein gilt.[33)] Dies kann man zB. beim Kalkül BFF dadurch erreichen, daß man die Regel 1.62 wegläßt. Mathematisch interessant wäre vielleicht die Frage, ob ein solcher durch die Axiome $\vdash$ a), $\vdash$ b) und u) verstärkter, "intuitionistischer" Begriffskalkül ${}^{i}BFF_u^{\vdash}$ bzw. ${}^{i}BGS_u^{\vdash}$ die volle intuitionistische Urteilslogik liefert, die dann keine Boolesche sondern eine allgemeinere Algebra beschreibt.
Es fragt sich natürlich, ob dieser Verzicht auf das Tertium-non-datur von der Sache her notwendig oder wenigstens nützlich ist. Wir werden sehen, daß weder das eine, noch das

andere zutrifft.

Zur Vorbereitung betrachten wir die vier traditionellen Urteile a, e, i, o mit ihren BGS-Übersetzungen.

SaP	Alle S sind P	$S \leq P,\ S\overline{P} = 0$
SeP	Alle S sind nicht P	$S \leq \overline{P},\ SP = 0$
SiP	Einige S sind P	$SP \neq 0,\ S \not\leq \overline{P}$
SoP	Einige S sind nicht P	$S\overline{P} \neq 0,\ S \not\leq P$ [34]

Wie man sieht, stehen a und o sowie e und i im Negatverhältnis. Für das folgende genügt es, a und o zu betrachten; für e und i gelten analoge Überlegungen.

a- und o-Urteil lassen sich auch so ausdrücken:

SaP Jede Art x von S ist auch Art von P, dh. wenn x Art von S ist, dann ist x auch Art von P.

SoP Es gibt eine widerspruchsfreie gemeinsame Art von S und $\overline{P}$ bzw. es gibt eine Art x, die unter S, nicht aber unter P fällt.

Diese Umschreibungen entsprechen den folgenden Sätzen 36) und 37), zu deren Beweis man die Sätze 33) bis 35) benötigt.

33) $\vdash \overline{ab} = \overline{a}+\overline{b},\ \overline{a+b} = \overline{a}\overline{b}$

$\vdash \overline{\prod_i a_i} = \sum_i \overline{a_i},\ \overline{\sum_i a_i} = \prod_i \overline{a_i}$

$\vdash \overline{\prod_x f(x)} = \sum_x \overline{f(x)},\ \overline{\sum_x f(x)} = \prod_x \overline{f(x)}$

34) $a \leq b,\ c \leq d \ \vdash\ ac \leq bd,\ a+c \leq b+d$

$a_i \leq b_i \ \vdash\ \prod_i a_i \leq \prod_i b_i,\ \sum_i a_i \leq \sum_i b_i$

$f(x) \leq g(x) \ \vdash\ \prod_x f(x) \leq \prod_x g(x),\ \sum_x f(x) \leq \sum_x g(x)$

35) $a \leq b,\ b \leq c,\ c \leq a \ \vdash\ a = b,\ b = c,\ c = a$

36) $\vdash (S \leq P) = \prod_x ((x \leq S) \leq (x \leq P))$

36') $\vdash (S \leq P) = \prod_y ((P \leq y) \leq (S \leq y))$ [35]

Bei 36), 36'), 37): x bzw. y nicht frei in S, P

37) $\vdash (S\overline{P} \neq 0) = \sum_x (x \leq S)(x \not\leq P) = \sum_x (x \leq S)(x \leq \overline{P})(x \neq 0)$

Innerhalb der Angewandten Logik, also unter den Voraussetzungen des Kalküls $BGS^{\vdash}_{a}$, gelten darüber hinaus noch folgende Umschreibungen:

SaP Jedes Individuum x^I, das unter S fällt, fällt auch unter P, dh. wenn ein Individuum x^I unter S fällt, so fällt es auch unter P.

SoP Es gibt ein Individuum x^I, das unter S, aber nicht unter P (und damit unter $\overline{P}$) fällt.[36]

Dies entspricht den Sätzen:

$38_a)$ $\vdash (S \leq P) = \prod_x ((x^I \leq S) \leq (x^I \leq P))$

$39_a)$[36] $\vdash (S\overline{P} \neq 0) = \sum_x ((x^I \leq S)(x^I \not\leq P)) = \sum_x ((x^I \leq S)(x^I \leq \overline{P}))$

Bei $38_a)$, $39_a)$: x nicht frei in S, P; kein in x freier Index frei in S, P

Üblicherweise werden die partikulären Urteile "Einige ... sind ..." in dieser speziellen Weise aufgefaßt, obwohl dies nur unter den Voraussetzungen der Angewandten Begriffslogik gerechtfertigt ist. Das mag daran liegen, daß sich unser Alltagsdenken, aber auch das Denken zB. des Mathematikers unbewußt meist an Kollektiven orientiert. Insbesondere bei der urteilslogischen Deutung der Begriffe als Satzfunktionen, deren Argumente Individuen sind, macht sich diese Gewohnheit bemerkbar.

Der Intuitionist fordert nun zusätzlich noch, es müsse zu dem in Satz 39) als existent behaupteten Individuum ein Konstruktionsverfahren geben. Andernfalls könnten partikuläre Urteile, mindestens soweit sie sich auf unendliche Gesamtheiten bezögen, nicht sinnvoll aufgestellt werden.[37)]

Es ist klar, daß der klassisch mögliche Schluß von $\bar a$ auf o nun nicht mehr möglich ist, da a und das neue o-Urteil, es heiße o', nicht mehr im Negatverhältnis stehen. Denn o' bedeutet ja: o-Urteil plus Konstruktionsverfahren, und die Widerlegung eines a-Urteils liefert eine solches Verfahren - worin immer es bestehen möge - nicht.

Sollen dagegen a und o' im Negatverhältnis stehen, so muß nunmehr das Negat andere Eigenschaften aufweisen, und zwar solche, die einen Schluß von $\bar a$ auf o' verhindern. Speziell darf nur noch $\overline{o'} = a$, nicht aber $\bar a = o'$ gelten, was klassisch äquivalent ist. Außerdem darf nicht mehr allgemein $A + \bar A$ gelten bzw. nur noch $A \leq \bar{\bar A}$, aber nicht $\bar{\bar A} \leq A$. Denn klassisch könnte man zur Begründung eines o-Urteils durch indirekten Beweis folgendermaßen schließen:

Hierzu wird die Annahme $\bar o$ ad absurdum geführt.

So:

$$\dfrac{\overset{\text{Ann.}}{\bar o} \qquad \dfrac{\bar o = a}{\bar o \leq a}\,{\scriptstyle 2.7}}{a}\,{\scriptstyle \vdash b)}$$

$$\vdots$$

$$\dfrac{\dfrac{\boxed{o = \bar a} \qquad \dfrac{\dfrac{a = 0}{\bar a = \bar 0}\,{\scriptstyle 15)} \qquad \bar 0 = 1}{\bar a = 1}\,{\scriptstyle 24)}}{o = 1}\,{\scriptstyle 24)}}{o}\,{\scriptstyle u)}$$

oder so:

(Anfang wie links)

$$\vdots$$

$$\dfrac{\dfrac{\overset{2.5}{o \leq 1} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\bar o = a \qquad a = 0}{\bar o = 0}\,{\scriptstyle 24)}}{\bar{\bar o} = \bar 0}\,{\scriptstyle 15)} \qquad \overset{15')}{\bar 0 = 1}}{\bar{\bar o} = 1}\,{\scriptstyle 24)}}{1 \leq \bar{\bar o}}\,{\scriptstyle 2.7} \qquad \boxed{\bar{\bar o} \leq o}}{1 \leq o}\,{\scriptstyle 2.6}}{o = 1}\,{\scriptstyle 2.7}}{o}\,{\scriptstyle u)}$$

In beiden Beweisen wurde nur intuitionistisch erlaubt geschlossen bis auf die Verwendung der umrandeten Formeln $o = \bar a$ und $\bar{\bar o} \leq o$.

Letztere Formel ergibt sich aus dem folgenden Satz

40) $\vdash a = \bar{\bar a}$

Abschließend läßt sich zu dem erwähnten Einwand gegen das Tertium-non-datur sagen:

Die Konstruktivitätsforderung im Zusammenhang mit partikulären Urteilen kann sinnvoll nur für Kollektive gestellt werden, da Konstruktionsverfahren in jedem einzelnen Falle ihrer Anwendung ein Individuum liefern und daher nur eine spezielle Art von Begriffen, nämlich Kollektive repräsentieren.

Um den Einwand führen zu können, benötigt man also die Voraussetzungen der Angewandten Logik, und zwar unabhängig von der Art der verwendeten Negation.

Aus ähnlichen Gründen sind auch Argumente gegen das Tertium-non-datur, die von der Beweisbarkeit oder Unbeweisbarkeit bzw. von der Wahrheit oder Unwahrheit von Urteilen handeln, vielleicht für eine beim Urteil ansetzende Logik von Belang, nicht aber für die Reine Begriffslogik. Das Negatverhältnis ist hier eine Beziehung zwischen Begriffen, unter die noch nicht einmal Individuen zu fallen brauchen, und beinhaltet lediglich die Unverträglichkeit und die Vollständigkeit der Alternative. Diese letztere Eigenschaft des Negatverhältnisses aufzugeben, besteht für die Reine Begriffslogik aufgrund der intuitionistischen Bedenken jedenfalls kein Anlaß.

VII. Anhang

§1 Übersicht

Der Anhang enthält erstens wichtige, im Text nicht geführte Beweise. Zweitens wird gezeigt, wie sich der mehrdimensionale Kalkül BFF zu den Kalkülen $BFF^{\vdash}$, $BFF^{\vdash}_{1}$, $BFF^{\vdash}_{2}$, $BFF^{\vdash}_{a}$, $BFF^{\vdash}_{u}$, $BFF^{\vdash}_{u'}$ ausbauen läßt. Diese Kalküle sind jeweils mit den entsprechenden BFF-Kalkülen $BGS^{\vdash}$, $BGS^{\vdash}_{1}$ etc. äquivalent. Drittens werden einige Fragen angeschnitten, die mit dem Verhältnis von logischen und nichtlogischen Kalkülen zusammenhängen. Den Abschluß bilden einige historische Bemerkungen.

§ 2 Beweise

Die Beweise sind nach den Seiten eingeteilt, auf denen sich die zugehörigen Theoreme befinden.

<u>S. 22 - 26:</u>

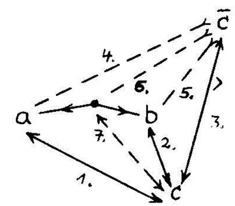
3) s. v. Petzinger (1), S. 18

4) Beweis trivial, ergibt sich unmittelbar aus 3).

5) s. v. Petzinger (1), S. 21.

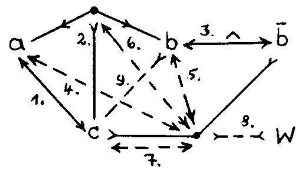
6) s. v. Petzinger (1), S. 21.

7)



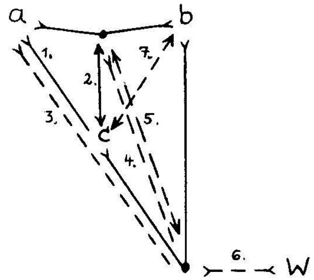
1. Ann.
2. Ann.
3. 1.2
4. 1.61
5. 1.61
6. 1.9
7. 1.5

8)



1. Ann.	6. 7)
2. Ann.	7. 1.5
3. 1.2	8. 2)
4. 1.5	9. 1)
5. 1.5	

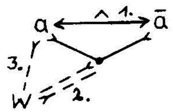
9)



1. Ann.	5. 1.5
2. Ann.	6. 2)
3. 1.4	7. 1.10
4. 1.8	

10) Beweis der zweiten Hälfte des Distributivgesetzes in v. Petzinger (1), S. 23 f.

11)

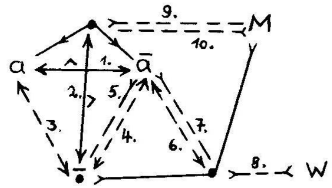


1. 1.2
2. 1.10
3. 1.4

12) Beweis trivial mit 1.3, 3).

13) Beweis trivial mit 11), 3).

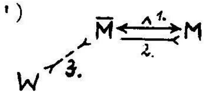
14) Daß das Spezifikat von a und ā widersprüchlich ist, folgt trivial aus 1.2 und 1.10. Die verbleibende Behauptung ergibt sich so:



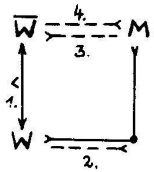
1. 1.2	6. 1.5
2. 1.2	7. 1.4
3. 1.5	8. 2)
4. 1.5	9. 1)
5. 1.61	10. 1.3

15) Für die ersten beiden Regeln s. v. Petzinger (1), S. 13. Zweimalige Anwendung der ersten beiden Regeln ergibt die Regeln drei und vier.

15')



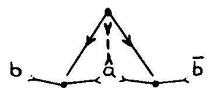
1. 1.2
2. 1.3
3. 2)

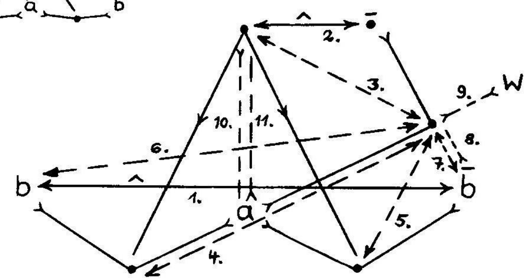


1. 1.2
2. 13)
3. 1)
4. 1.3

<u>S. 33:</u>

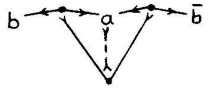
2.4, erste Hälfte:

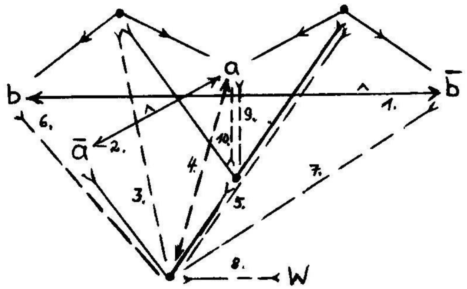




1. 1.2
2. 1.2
3. 1.5
4. 1.5
5. 1.5
6. 9)
7. 9)
8. 1.61
9. 2)
10. 1)
11. 1.9

2.4, zweite Hälfte:





1. 1.2
2. 1.2
3. 1.4
4. 1.5
5. 1.4
6. 8)
7. 8)
8. 1.10
9. 1)
10. 1.8

S. 34, 35:

16) Es ist noch zu zeigen: $a \leq b+c \vdash a\bar{b} \leq c$ und
$a \leq \bar{b}+c \vdash ab \leq c$.

Erste Hälfte:

(1)	$a\bar{b} \leq a$	2.2
(2)	$a \leq b+c$	Ann.
(3)	$a\bar{b} \leq b+c$	2.6 aus (1), (2)
(4)	$b \leq c+b$	2.3
(5)	$c \leq c+b$	2.3
(6)	$b+c \leq c+b$	2.9 aus (4), (5)
(7)	$a\bar{b} \leq c+b$	2.6 aus (3), (6)
(8)	$a\bar{b} \leq \bar{b}$	2.2
(9)	$\bar{b} \leq c+\bar{b}$	2.3
(10)	$a\bar{b} \leq c+\bar{b}$	2.6 aus (8), (9)
(11)	$a\bar{b} \leq (c+b)(c+\bar{b})$	2.8 aus (7), (10)
(12)	$c = (c+b)(c+\bar{b})$	2.4
(13)	$(c+b)(c+\bar{b}) \leq c$	2.7 aus (12)
(14)	$a\bar{b} \leq c$	2.6 aus (11), (13)

Den Beweis der zweiten Hälfte der Regel erhält man, indem man überall b und $\bar{b}$ vertauscht und die Zeilen (8) bis (10) vor den Zeilen (1) bis (7) anordnet.

1.2: Hier ist nur $a\bar{a} = 0$ abzuleiten, da die durch das Dach ($\wedge$) angedeutete besondere Eigenart der Totaldiversität im Kalkül schon durch die Regeln 1.61, 1.62 ausgedrückt ist.

(1)	$a \leq a+0$	2.3
(2)	$a\bar{a} \leq 0$	16) aus (1)
(3)	$0 \leq a\bar{a}$	2.5
(4)	$a\bar{a} = 0$	2.7 aus (2), (3)

1.5: $a \leq b,\ bc = 0 \ \vdash\ ac = 0$

(1)	$ac \leq a$	2.2
(2)	$a \leq b$	Ann.
(3)	$ac \leq b$	2.6 aus (1), (2)
(4)	$ac \leq c$	2.2
(5)	$ac \leq bc$	2.8 aus (3), (4)
(6)	$bc = 0$	Ann.
(7)	$bc \leq 0$	2.7 aus (6)
(8)	$ac \leq 0$	2.6 aus (5), (7)
(9)	$0 \leq ac$	2.5
(10)	$ac = 0$	2.7 aus (8), (9)

1.10 erste Hälfte: $c \leq a,\ c \leq b,\ ab = 0 \ \vdash\ c = 0$

(1)	$c \leq a$	Ann.
(2)	$c \leq b$	Ann.
(3)	$c \leq ab$	2.8 aus (1), (2)
(4)	$ab = 0$	Ann.
(5)	$ab \leq 0$	2.7 aus (4)
(6)	$c \leq 0$	2.6 aus (3), (5)
(7)	$0 \leq c$	2.5
(8)	$c = 0$	2.7 aus (6), (7)

S. 42:

18) $ab \leq c \ \vdash\ a\bar{c} \leq \bar{b}$

(1)	$ab \leq c$	Ann.
(2)	$a \leq \bar{b}+c$	16) aus (1)
(3)	$\bar{b}+c = c+\bar{b}$	5)
(4)	$\bar{b}+c \leq c+\bar{b}$	2.7 aus (3)
(5)	$a \leq c+\bar{b}$	2.6 aus (2), (4)
(6)	$a\bar{c} \leq \bar{b}$	16) aus (5)

Den Beweis der Umkehrung erhält man, indem man in obigem Beweis b durch $\bar{c}$ und c durch $\bar{b}$ ersetzt.

Die Beweise der übrigen Beziehungen verlaufen analog.

S. 44:

0/1') $a \neq 0 \ \dashv\vdash\ a = 1$

(1)	$a = 0 \dashv\vdash a \neq 1$	0/1)
(2)	$(a = 0) = (a \neq 1)$	$\vdash$ a) zweimal, aus (1)
(3)	$(a \neq 0) = (a = 1)$	15) aus (2)
(4)	$a \neq 0 \dashv\vdash a = 1$	$\vdash$ b) zweimal, aus (3)

<u>S. 46 - 47:</u>

20^{I}) $a^{I} \nleq b \dashv\vdash a^{I} \leq \bar{b}$

(1)	$a^{I} \nleq b$	Ann.
(2)	$a^{I}\bar{b} \neq 0$	21) aus (1)
(3)	$a^{I}\bar{b} \leq a^{I}$	2.2
(4)	$a^{I}\bar{b} = a^{I}$	I2) aus (2), (3)
(5)	$a^{I} \leq a^{I}\bar{b}$	2.7 aus (4)
(6)	$a^{I}\bar{b} \leq \bar{b}$	2.2
(7)	$a^{I} \leq \bar{b}$	2.6 aus (5), (6)

(1)	$a^{I} \neq 0$	I1)
(2)	$a^{I} \leq \bar{b}$	Ann.
(3)	$a^{I} \nleq b$	22) aus (1), (2)

21) $a \nleq b \dashv\vdash a\bar{b} \neq 0$

(1)	$a \leq b \dashv\vdash a\bar{b} = 0$	1)
(2)	$(a \leq b) = (a\bar{b} = 0)$	$\vdash$ a) zweimal, aus (1)
(3)	$(a \nleq b) = (a\bar{b} \neq 0)$	15) aus (2)
(4)	$a \nleq b \dashv\vdash ab \neq 0$	$\vdash$ b) zweimal, aus (3)

22) $a \leq b,\ a \neq 0 \vdash a \nleq \bar{b}$

(1)	$a \leq b$	Ann.
(2)	$a \leq \bar{b}$	Ann.
(3)	$a \leq b\bar{b}$	2.8 aus (1), (2)
(4)	$b\bar{b} = 0$	14)
(5)	$b\bar{b} \leq 0$	2.7 aus (4)
(6)	$a \leq 0$	2.6 aus (3), (5)
(7)	$0 \leq a$	2.5
(8)	$a = 0$	2.7 aus (6), (7)
(9)	$(a \leq b)(a \leq \bar{b}) \leq (a = 0)$	$\vdash$ a) aus (1), (2), (8); (1), (2) beseitigt
(10)	$(a \leq b)(a \neq 0) \leq (a \nleq \bar{b})$	18) aus (9)
(11)	$a \leq b,\ a \neq 0 \vdash a \nleq \bar{b}$	$\vdash$ b) aus (10)

Die erste Hälfte der Regel wird analog bewiesen.

S. 67 - 69:

24) Die Beweise sind trivial.

25) $a \leq b \vdash \bar{a}+b = 1$

(1)	$\bar{a}+b \leq 1$	2.5
(2)	$1a \leq a$	2.2
(3)	$a \leq b$	Ann.
(4)	$1a \leq b$	2.6 aus (2), (3)
(5)	$1 \leq \bar{a}+b$	16) aus (4)
(6)	$\bar{a}+b = 1$	2.7 aus (1), (5)

$\bar{a}+b = 1 \vdash a \leq b$

(1)	$a \leq 1$	2.5
(2)	$a \leq a$	2.1
(3)	$a \leq 1a$	2.8 aus (1), (2)
(4)	$\bar{a}+b = 1$	Ann.
(5)	$1 \leq \bar{a}+b$	2.7 aus (4)
(6)	$1a \leq b$	16) aus (5)
(7)	$a \leq b$	2.6 aus (3), (6)

27_u) $A \leq (B \leq C) \dashv\vdash AB \leq C$

(1)	$A \leq (B \leq C)$	Ann.
(2)	$(B \leq C) = (\bar{B}+C)$	26_u)
(3)	$(B \leq C) \leq (\bar{B}+C)$	2.7 aus (2)
(4)	$A \leq \bar{B}+C$	2.6 aus (1), (3)
(5)	$AB \leq C$	16) aus (4)

(6)	$AB \leq C$	Ann.
(7)	$A \leq \bar{B}+C$	16) aus (6)
(8)	$(B \leq C) = (\bar{B}+C)$	26_u)
(9)	$(\bar{B}+C) \leq (B \leq C)$	2.7 aus (8)
(10)	$A \leq (B \leq C)$	2.6 aus (7), (9)

4.3 $\vdash (\bar{A} \leq \bar{B}) \leq (B \leq A)$

Der Beweis ergibt sich trivial mit 15) und $\vdash$ a).

4.6 $A,\ A \leq B \vdash B$

$$\cfrac{\cfrac{\overset{2.5}{B \leq 1} \qquad \cfrac{\cfrac{\cfrac{\overset{\text{Ann.}}{A}}{A = 1}\,u)}{1 \leq A}\,2.7 \qquad \overset{\text{Ann.}}{A \leq B}}{1 \leq B}\,2.6}{B = 1}\,2.7}{B}\,u)$$

<u>S. 80 - 81:</u>

Beweis des Schemas auf der Mitte von S. 80. A und B mögen **die** zur Anwendung von Regel $\vdash$ a) erforderliche Gestalt haben.

(1)	$A,\ B \vdash \bar{B}$	Ann.
(2)	$AB \leqq \bar{B}$	$\vdash$ a) aus (1)
(3)	$AB \leqq B$	2.2
(4)	$AB \leqq \bar{B}B$	2.8 aus (2), (3)
(5)	$B\bar{B} = \bar{B}B$	5)
(6)	$\bar{B}B \leqq B\bar{B}$	2.7 aus (5)
(7)	$AB \leqq B\bar{B}$	2.6 aus (4), (6)
(8)	$A,\ \bar{B} \vdash B$	Ann.
(9)	$A\bar{B} \leqq B$	$\vdash$ a) aus (8)
(10)	$A\bar{B} \leqq \bar{B}$	2.2
(11)	$A\bar{B} \leqq B\bar{B}$	2.8 aus (9), (10)
(12)	$AB+A\bar{B} \leqq B\bar{B}$	2.9 aus (7), (11)
(13)	$A = AB+A\bar{B}$	2.4
(14)	$B\bar{B} = 0$	14)
(15)	$B\bar{B} \leqq 0$	2.7 aus (14)
(16)	$AB+A\bar{B} \leqq 0$	2.6 aus (12), (15)
(17)	$0 \leqq AB+A\bar{B}$	2.5
(18)	$AB+A\bar{B} = 0$	2.7 aus (16), (17)
(19)	$A = 0$	24) aus (13), (18)

28), 29) Die Beweise verlaufen wie der Beweis von Satz 17). Bei 28) ist Axiom 2.7 der Ausgangspunkt, bei 29) die Regel 24).

30_u) $\vdash (A = \bar{A}) = 0, \quad A \neq \bar{A}$

(1)	$\bar{A} \leqq A$	Ann.
(2)	$A = A+\bar{A}$	3) aus (1)
(3)	$A+\bar{A} = 1$	14)
(4)	$A = 1$	24) aus (2), (3)
(5)	$1 = A$	24) aus (4)
(6)	$A \leqq \bar{A}$	Ann.
(7)	$A = A\bar{A}$	3) aus (6)
(8)	$A\bar{A} = 0$	14)
(9)	$A = 0$	24) aus (7), (8)
(10)	$1 = 0$	24) aus (5), (9)
(11)	$A = \bar{A} \vdash \bar{A} \leqq A$	2.7
(12)	$(A = \bar{A}) \leqq (\bar{A} \leqq A)$	$\vdash$ a) aus (11)
(14)	$(A = \bar{A}) \leqq (A \leqq \bar{A})$	$\vdash$ a) aus (13)
(13)	$A = \bar{A} \vdash A \leqq \bar{A}$	2.7
(15)	$(A = \bar{A}) \leqq (\bar{A} \leqq A)(A \leqq \bar{A})$	2.8 aus (12), (14)
(16)	$(\bar{A} \leqq A)(A \leqq \bar{A}) \leqq (1 = 0)$	$\vdash$ a) aus (1), (6), (10); (1), (6) beseitigt
(17)	$1 \leqq 1$	2.1
(18)	$1 \leqq 1$	2.1
(19)	$1 = 1$	2.7 aus (17), (18)
(20)	$1 \neq 0$	0/1') aus (19); vgl. S. 103
(21)	$(A = \bar{A}) \leqq (1 = 0)$	2.6 aus (15), (16)
(22)	$(1 \neq 0) \leqq (A \neq \bar{A})$	15) aus (21)
(23)	$A \neq \bar{A}$	$\vdash$ b) aus (20), (22)
(24)	$(A \neq \bar{A}) = 1$	u) aus (23)
(25)	$(A = \bar{A}) = \bar{1}$	15) aus (24)

(26)	$\bar{1} = 0$	15')
(27)	$(A = \bar{A}) = 0$	24) aus (25), (26)

31_u) $\vdash \ \bar{A} = (A = 0)$

(1)	$A = (A = 1)$	$\tilde{\text{u}}$)
(2)	$\bar{A} = (A \neq 1)$	15) aus (1)
(3)	$A \neq 1 \ \dashv\vdash \ A = 0$	0/1)
(4)	$(A \neq 1) = (A = 0)$	$\vdash$ a) zweimal, aus (3)
(5)	$\bar{A} = (A = 0)$	24) aus (2), (4)

S. 82:

Beweis der Behauptung auf der Mitte der Seite. A und B mögen jeweils die zur Anwendung von $\vdash$ a), $\vdash$ b) erforderliche Gestalt haben.

(1)	$A, B \ \vdash \ \bar{B}$	Ann.
(2)	$A, \bar{B} \ \vdash \ B$	Ann.
(3)	$A = 0$	Beh. S. 80, vgl. Beweis S. 108, aus (1), (2)
(4)	$A \leq 0$	2.7 aus (3)
(5)	$0 \leq (B = \bar{B})$	2.5
(6)	$A \leq (B = \bar{B})$	2.6 aus (4), (5)
(7)	$A \ \vdash \ B = \bar{B}$	$\vdash$ b) aus (6)

(1)	$A \ \vdash \ B = \bar{B}$	Ann.
(2)	$A \leq (B = \bar{B})$	$\vdash$ a) aus (1)
(3)	$B = \bar{B} \ \vdash \ B \leq \bar{B}$	2.7
(4)	$(B = \bar{B}) \leq (B \leq \bar{B})$	$\vdash$ a) aus (3)
(5)	$B = \bar{B} \ \vdash \ \bar{B} \leq B$	2.7
(6)	$(B = \bar{B}) \leq (\bar{B} \leq B)$	$\vdash$ a) aus (5)
(7)	$A \leq (B \leq \bar{B})$	2.6 aus (2), (4)
(8)	$A \leq (\bar{B} \leq B)$	2.6 aus (2), (6)
(9)	$AB \leq \bar{B}$	27_u) aus (7)
(10)	$A\bar{B} \leq B$	27_u) aus (8)
(11)	$A, B \ \vdash \ \bar{B}$	$\vdash$ b) aus (9)
(12)	$A, \bar{B} \ \vdash \ B$	$\vdash$ b) aus (10)

S. 85:

32_u) $\vdash \sum_y \prod_x (A_{xy} = \overline{A_{xx}}) = 0$

(1)	$\prod_x (A_{xy} = \overline{A_{xx}}) \leq (A_{yy} = \overline{A_{yy}})$	2.2'
(2)	$(A_{yy} = \overline{A_{yy}}) = 0$	30_u)
(3)	$(A_{yy} = \overline{A_{yy}}) \leq 0$	2.7 aus (2)
(4)	$\prod_x (A_{xy} = \overline{A_{xx}}) \leq 0$	2.6 aus (1), (3)
(5)	$\sum_y \prod_x (A_{xy} = \overline{A_{xx}}) \leq 0$	2.9' aus (4)

(6)	$0 \leq \sum_y \prod_x (A_{xy} = \overline{A_{xx}})$	2.5
(7)	$\sum_y \prod_x (A_{xy} = \overline{A_{xx}}) = 0$	2.7 aus (5), (6)

<u>S. 92 - 93:</u>

33) vgl. v. Petzinger (1), S. 18.
Die auf $\prod$ und $\sum$ bezüglichen Teile des Satzes werden analog bewiesen, mit 2.x' bzw. 2.x" statt 2.x.

34) $a \leq b,\ c \leq d \vdash ac \leq bd,\ a+c \leq b+d$

(1)	$ac \leq a$	2.2
(2)	$a \leq b$	Ann.
(3)	$ac \leq b$	2.6 aus (1), (2)
(4)	$ac \leq c$	2.2
(5)	$c \leq d$	Ann.
(6)	$ac \leq d$	2.6 aus (4), (5)
(7)	$ac \leq bd$	2.8 aus (3), (6)

Analog folgt mit Hilfe von 2.3, 2.9: $a+c \leq b+d$.
Ähnlich werden die auf $\prod$ und $\sum$ bezüglichen Teile des Satzes bewiesen, nämlich mit Hilfe von 2.2', 2.8'; 2.3', 2.9' sowie 2.2", 2.8"; 2.3", 2.9".

35) Der Beweis ist trivial.

36) $\vdash \prod_x ((x \leq S) \leq (x \leq P)) = (S \leq P)$ x nicht frei in S, P

(1)	$\prod_x ((x \leq S) \leq (x \leq P)) \leq ((S \leq S) \leq (S \leq P))$	2.2"
(2)	$S \leq S$	2.1
(3)	$(S \leq S) \leq (S \leq P)$	Ann.
(4)	$S \leq P$	$\vdash$ b) aus (2), (3)
(5)	$((S \leq S) \leq (S \leq P)) \leq (S \leq P)$	$\vdash$ a) aus (3), (4); (3) beseitigt
(6)	$\prod_x ((x \leq S) \leq (x \leq P)) \leq (S \leq P)$	2.6 aus (1), (5)
(7)	$(x \leq S)(S \leq P) = (S \leq P)(x \leq S)$	5)
(8)	$(S \leq P)(x \leq S) \leq (x \leq S)(S \leq P)$	2.7 aus (7)
(9)	$x \leq S$	Ann.
(10)	$S \leq P$	Ann.
(11)	$x \leq P$	2.6 aus (9), (10)
(12)	$(x \leq S)(S \leq P) \leq (x \leq P)$	$\vdash$ a) aus (9)-(11); (9), (10) beseitigt
(13)	$(S \leq P)(x \leq S) \leq (x \leq P)$	2.6 aus (8), (12)
(14)	$(S \leq P) \leq ((x \leq S) \leq (x \leq P))$	$27_{u'}$) aus (13) [38]
(15)	$(S \leq P) \leq \prod_x ((x \leq S) \leq (x \leq P))$	2.8" aus (14), mit x nicht frei in S, P
(16)	$\prod_x ((x \leq S) \leq (x \leq P)) = (S \leq P)$	2.7 aus (6), (15)

36') wird analog bewiesen.

37) Wir beweisen:

a) $\vdash \sum_{x}(x \leq S)(x \nparallel P) \leq (S\bar{P} \neq 0)$

b) $\vdash (S\bar{P} \neq 0) \leq \sum_{x}(x \leq S)(x \leq \bar{P})(x \neq 0)$

c) $\vdash \sum_{x}(x \leq S)(x \leq \bar{P})(x \neq 0) \leq \sum_{x} (x \leq S)(x \nparallel P)$

Bei a): x nicht frei in S, P.

Aus a) – c) folgt die Behauptung gemäß 35).

(1)	$x \leq S$	Ann.
(2)	$x \nparallel P$	Ann.
(3)	$S \nparallel P$	17) aus (1), (2)
(4)	$S\bar{P} \neq 0$	21) aus (3)
(5)	$(x \leq S)(x \nparallel P) \leq (S\bar{P} \neq 0)$	$\vdash$ a) (1), (2), (4); (1), (2) beseitigt
(6)	$\sum_{x}(x \leq S)(x \nparallel P) \leq (S\bar{P} \neq 0)$	2.9" aus (5), mit x nicht frei in S,P

(1)	$S\bar{P} \neq 0$	Ann.
(2)	$S\bar{P} \leq S$	2.2
(3)	$(S\bar{P} \neq 0)(S\bar{P} \leq S) \leq (S\bar{P} \leq S)$	2.2
(4)	$S\bar{P} \leq S$	$\vdash$ b) aus (1) – (3)
(5)	$(S\bar{P} \neq 0) \leq (S\bar{P} \leq S)$	$\vdash$ a) aus (1), (4); (1) beseitigt
(6)	$S\bar{P} \neq 0$	Ann.
(7)	$S\bar{P} \leq \bar{P}$	2.2
(8)	$(S\bar{P} \neq 0)(S\bar{P} \leq \bar{P}) \leq (S\bar{P} \leq \bar{P})$	2.2
(9)	$S\bar{P} \leq \bar{P}$	$\vdash$ b) aus (6) – (8)

(10)	$(S\bar{P} \neq 0) \leq (S\bar{P} \leq \bar{P})$	$\vdash$ a) aus (6), (9); (6) beseitigt
(11)	$(S\bar{P} \neq 0) \leq (S\bar{P} \leq S)(S\bar{P} \leq \bar{P})$	2.8 aus (5), (10)
(12)	$(S\bar{P} \neq 0) \leq (S\bar{P} \neq 0)$	2.1
(13)	$(S\bar{P} \neq 0) \leq (S\bar{P} \leq S)(S\bar{P} \leq \bar{P})(S\bar{P} \neq 0)$	2.8 aus (11), (12)
(14)	$(S\bar{P} \leq S)(S\bar{P} \leq \bar{P})(S\bar{P} \neq 0) \leq \sum_{x}(x \leq S)(x \leq \bar{P})(x \neq 0)$	2.3"
(15)	$(S\bar{P} \neq 0) \leq \sum_{x}(x \leq S)(x \leq \bar{P})(x \neq 0)$	2.6 aus (13), (14)

(1)	$(x \leq S) \leq (x \leq S)$	2.1
(2)	$x \leq \bar{P},\ x \neq 0 \ \vdash\ x \nparallel P$	22)
(3)	$(x \leq \bar{P})(x \neq 0) \leq (x \nparallel P)$	$\vdash$ a) aus (2)
(4)	$(x \leq S)(x \leq \bar{P})(x \neq 0) \leq (x \leq S)(x \nparallel P)$	34) aus (1), (3)
(5)	$\sum_{x}(x \leq S)(x \leq \bar{P})(x \neq 0) \leq \sum_{x}(x \leq S)(x \nparallel P)$	34) aus (4)

38_a) Die Subsumtion $(S \leq P) \leq \prod_{x}((x^I \leq S) \leq (x^I \leq P))$ wird wie bei Satz 36) bewiesen. Der Beweis der entgegengesetzten Subsumtion sieht so aus (dabei darf x nicht frei in S, P und kein in x freier Index frei in S, P vorkommen):

(1)	$x^I \leq S\bar{P}$	Ann.
(2)	$S\bar{P} \leq S$	2.2
(3)	$x^I \leq S$	2.6 aus (1), (2)
(4)	$(x^I \leq S) \leq (x^I \leq P)$	Ann.

(5)	$x^I \leqq P$	$\vdash$ b) aus (3), (4)
(6)	$S\bar{P} \leqq \bar{P}$	2.2
(7)	$x^I \leqq \bar{P}$	2.6 aus (1), (6)
(8)	$x^I \leqq P\bar{P}$	2.8 aus (5), (7)
(9)	$P\bar{P} = 0$	14)
(10)	$P\bar{P} \leqq 0$	2.7 aus (9)
(11)	$x^I \leqq 0$	2.6 aus (8), (10)
(12)	$0 \leqq x^I$	2.5
(13)	$x^I = 0$	2.7 aus (11), (12)
(14)	$(x^I \leqq S\bar{P})((x^I \leqq S) \leqq (x^I \leqq P)) \leqq (x^I = 0)$	$\vdash$ a) aus (1), (4), (13); (1), (4) beseitigt
(15)	$(x^I \leqq S) \leqq (x^I \leqq P)$	Ann.
(16)	$x^I \neq 0$	I1)
(17)	$((x^I \leqq S) \leqq (x^I \leqq P))(x^I \neq 0) \leqq (x^I \nleqq S\bar{P})$	18) aus (14)
(18)	$x^I \nleqq S\bar{P}$	$\vdash$ b) aus (15) - (17)
(19)	$S\bar{P} = 0$	a) aus (18), mit x nicht frei in S, P; kein in x freier Index frei in S, P
(20)	$S \leqq P$	1.62 bzw. 1) aus (19)
(21)	$\prod_x((x^I \leqq S) \leqq (x^I \leqq P)) \leqq (S \leqq P)$	$\vdash$ a) aus (15), (20); (15) beseitigt

39a) Die zweite Gleichung ergibt sich trivial, weil wegen Regel 20^I) $\vdash$ $(x^I \nleqq P) = (x^I \leqq \bar{P})$ gilt.

Die zweite Subsumtion der Gleichung

$(S\bar{P} \neq 0) = \sum_x (x^I \leqq S)(x^I \leqq \bar{P})$ ergibt sich so:

(1)	$x^I \leqq S$	Ann.
(2)	$x^I \leqq \bar{P}$	Ann.
(3)	$x^I \leqq S\bar{P}$	2.8 aus (1), (2)
(4)	$x^I \neq 0$	I1)
(5)	$0 \leqq x^I$	2.5
(6)	$x^I \nleqq 0$	28) aus (4), (5)
(7)	$S\bar{P} \nleqq 0$	17) aus (3), (6)
(8)	$(x^I \leqq S)(x^I \leqq \bar{P}) \leqq (S\bar{P} \nleqq 0)$	$\vdash$ a) aus (1), (2), (7); (1), (2) beseitigt
(9)	$S\bar{P} = 0 \vdash S\bar{P} \leqq 0$	2.7
(10)	$(S\bar{P} = 0) \leqq (S\bar{P} \leqq 0)$	$\vdash$ a) aus (9)
(11)	$(S\bar{P} \nleqq 0) \leqq (S\bar{P} \neq 0)$	15) aus (10)
(12)	$(x^I \leqq S)(x^I \leqq \bar{P}) \leqq (S\bar{P} \neq 0)$	2.6 aus (8), (11)
(13)	$\sum_x (x^I \leqq S)(x^I \leqq \bar{P}) \leqq (S\bar{P} \neq 0)$	2.9" aus (12); mit x nicht frei in S, P

Der Beweis der ersten Subsumtion der Gleichung

$(S\bar{P} \neq 0) = \sum_x (x^I \le S)(x^I \le \bar{P})$ erfordert den Hilfssatz

$\tilde{a}$) $\vdash (a \neq 0) \le \sum_x (x^I \le a)$.

Hierbei darf x nicht frei in a und kein in x freier Index frei in a sein.

<u>Beweis:</u>

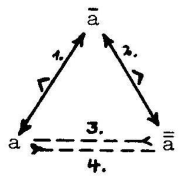
(1)	$\prod_x (x^I \not\le a) = \overline{\sum_x (x^I \le a)}$	33)
(2)	$\overline{\sum_x (x^I \le a)} \le \prod_x (x^I \not\le a)$	2.7 aus (1)
(3)	$x^I \not\le a \;\vdash\; a = 0$	a); mit x nicht frei in a, kein in x freier Index frei in a.
(4)	$\prod_x (x^I \not\le a) \le (a = 0)$	$\vdash$ a) aus (3)
(5)	$\overline{\sum_x (x^I \le a)} \le (a = 0)$	2.6 aus (2), (4)
(6)	$(a \neq 0) \le \sum_x (x^I \le a)$	15) aus (5)

(1)	$(S\bar{P} \neq 0) \le \sum_x (x^I \le S\bar{P})$	$\tilde{a}$); mit x nicht frei in S, P; kein in x freier Index frei in S, P.
(2)	$x^I \le S\bar{P}$	Ann.
(3)	$S\bar{P} \le S$	2.2
(4)	$x^I \le S$	2.6 aus (2), (3)
(5)	$(x^I \le S\bar{P}) \le (x^I \le S)$	$\vdash$ a) aus (2), (4); (2) beseitigt
(6)	$x^I \le S\bar{P}$	Ann.
(7)	$S\bar{P} \le \bar{P}$	2.2
(8)	$x^I \le \bar{P}$	2.6 aus (6), (7)
(9)	$(x^I \le S\bar{P}) \le (x^I \le \bar{P})$	$\vdash$ a) aus (6), (8); (6) beseitigt
(10)	$(x^I \le S\bar{P}) \le (x^I \le S)(x^I \le \bar{P})$	2.8 aus (5), (9)
(11)	$\sum_x (x^I \le S\bar{P}) \le \sum_x (x^I \le S)(x^I \le \bar{P})$	34) aus (10)
(12)	$(S\bar{P} \neq 0) \le \sum_x (x^I \le S)(x^I \le \bar{P})$	2.6 aus (1), (11)

Damit ist wegen 24) alles bewiesen.

<u>S. 95:</u>

40)



1.	1.2
2.	1.2
3.	1.61
4.	1.62

Wir tragen hier noch zwei Sätze nach, von denen einer schon früher (S. 48) erwähnt wurde. So erklärt sich auch die Numerierung.

23.1) $a_i \leq a,\ (x \leq a) \leq \sum_i (a_i = x) \ \vdash\ a = \sum_i a_i$

23.2$_a$) $a_i^I \leq a,\ (x^I \leq a) \leq \sum_i (a_i^I = x^I) \ \vdash\ a = \sum_i a_i^I$

Beweis:

23.1) Aus $a_i \leq a$ ergibt sich nach 2.9': $\sum_i a_i \leq a$

(mit i nicht frei in a). Wir haben also noch zu

$(x \leq a) \leq \sum_i (a_i = x) \ \vdash\ a \leq \sum_i a_i$

Übrigens muß bei beiden Sätzen gelten: i nicht frei in a, x; x nicht frei in a, a_i. Bei 23.2$_a$) muß zusätzlich gelten: Kein in x freier Index frei in a, a_i.

(1)	$(x \leq a) \leq \sum_i (a_i = x)$	Ann.
(2)	$a_i = x$	Ann.
(3)	$x \leq a_i$	2.7 aus (2)
(4)	$a_i \leq \sum_i a_i$	2.3'
(5)	$x \leq \sum_i a_i$	2.6 aus (3), (4)
(6)	$(a_i = x) \leq (x \leq \sum_i a_i$	$\vdash$ a) aus (2), (5); (2) beseitigt

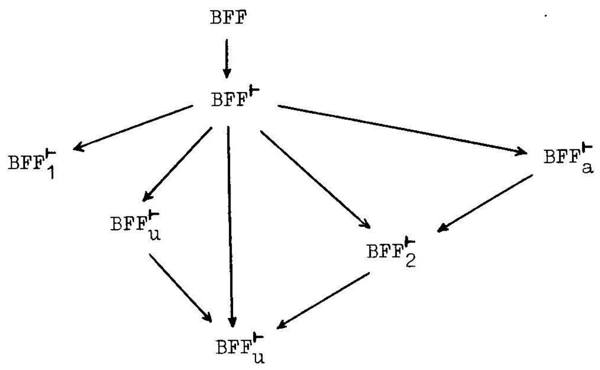
(7)	$\sum_i (a_i = x) \leq (x \leq \sum_i a_i)$	2.9' aus (6); mit i nicht frei in x.
(8)	$(x \leq a) \leq (x \leq \sum_i a_i)$	2.6 aus (1), (7)
(9)	$\prod_x ((x \leq a) \leq (x \leq \sum_i a_i)) = (a \leq \sum_i a_i)$	36); mit x nicht frei in a, a_i.
(10)	$\prod_x ((x \leq a) \leq (x \leq \sum_i a_i)) \leq (a \leq \sum_i a_i)$	2.7 aus (9)
(11)	$a \leq \sum_i a_i$	$\vdash$ b) aus (8), (10)

Der Beweis für Satz 23.2$_a$) verläuft genau so, jedoch wird in Zeile (9) der Satz 38$_a$) angewandt.

§ 3 Spezialisierungen des Kalküls BFF

Die im folgenden dargestellten Spezialfälle des Kalküls BFF entstehen durch Hinzufügen der wörtlich in die Sprache von BFF übersetzten Axiome ⊢ a), ⊢ b), s), 0/1), a), u), u'). Zugehörige Index- bzw. Variablenbedingungen sind jeweils zu übernehmen.

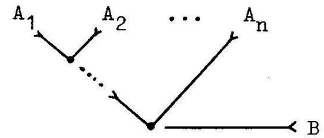
Die folgende Übersicht zeigt den Zusammenhang der verschiedenen Kalküle (vgl. S. 71).



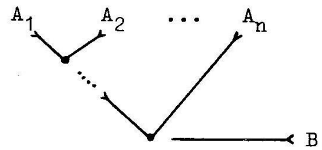
§ 3.1 Der Kalkül $BFF^{\vdash}$

Die Deduktions- und die Abtrennungsregel nehmen hier folgende Gestalt an:

⊢ a) Aus der Herleitung $A_1, \dots, A_n \vdash B$ gewinnt man die Formel

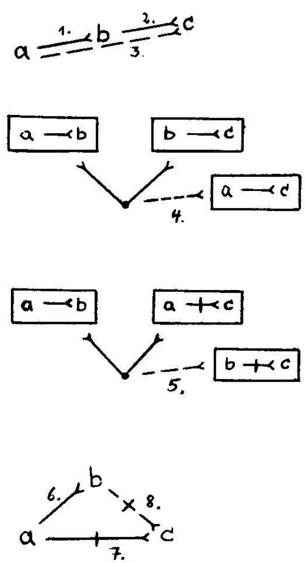


⊢ b) Aus den Formeln $A_1, \dots, A_n$ und der Formel



gewinnt man die Formel B.

Die Ableitung zB. des Theorems 17) schreibt sich dann so:

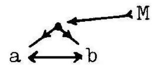


1. Ann.
2. Ann.
3. 1.4 aus 1., 2.
4. ⊢ a) aus 1. - 3.;
   1., 2. beseitigt
5. 18) aus 4.
6. Ann.
7. Ann.
8. ⊢ b) aus 5. - 7.

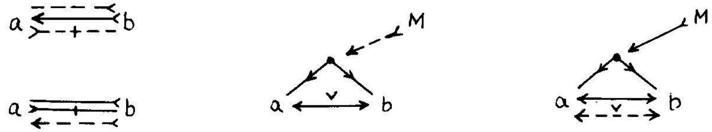
$\boxed{x \mathrel{+\!\!<} y}$ steht für $\overline{\boxed{x \mathrel{-\!\!<} y}}$

Wir schieben an dieser Stelle eine Bemerkung über die Zeichen $\longleftarrow\!\prec$ und $\overset{\vee}{\longleftrightarrow}$ ein.

$a \longleftarrow\!\prec b$ kann als Abkürzung für $a \;\overset{\longrightarrow\!\prec}{\succ\!\!\!+\!\!\!\longrightarrow}\; b$, $a \overset{\vee}{\longleftrightarrow} b$ kann als Abkürzung für



gelten. Diese Festsetzung ließe sich aber auch durch die Regeln ausdrücken:



§ 3.2 Der Kalkül $BFF^{\vdash}_{1}$

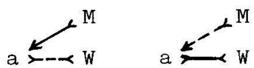
Der Kalkül $BFF^{\vdash}_{1}$ entsteht aus $BFF^{\vdash}$ durch Zusatz der Grundformel

s) $M \longrightarrow\!\prec W$

§ 3.3 Der Kalkül $BFF^{\vdash}_{2}$

Der Kalkül $BFF^{\vdash}_{2}$ entsteht aus $BFF^{\vdash}$ durch Hinzufügen der folgenden Grundregel:

0/1)



§ 3.4 Individuen - Kollektive - Der Kalkül $BFF^{\vdash}_{a}$

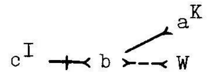
Zur Definition des Individualbegriffs dienen die Axiome

I1) $W \longleftarrow\!\prec a^{I}$

I2) $W \longleftarrow\!\prec b \;\overset{-\,-\,-\prec}{===}\; a^{I}$

Ein Kollektivbegriff ist durch die Regel gekennzeichnet

K)



Der Kalkül $BFF^{\vdash}_{a}$ entsteht aus $BFF^{\vdash}$ durch Zusatz der Regel

a) $c^{I} \;{+\!\!\!\longrightarrow\!\prec}\; b \succ\!-\,-\!\prec W$

§ 3.5 Die Kalküle $BFF^{\vdash}_{u}$ und $BFF^{\vdash}_{u'}$

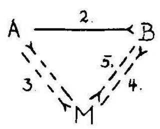
Die Kalküle $BFF^{\vdash}_{u}$ und $BFF^{\vdash}_{u'}$ entstehen aus $BFF^{\vdash}$ durch Zusatz des Urteilsprinzips:

u) $\dfrac{A}{A \succ\!-\,-\!\prec M} \qquad \dfrac{A \succ\!\longrightarrow\!\prec M}{A}$

das bei $BFF^{\vdash}_{u'}$ allerdings nur auf Beziehungsformeln angewendet werden darf.

An dieser Stelle, aber auch schon bei der Einführung der Regeln $\vdash$ a) und $\vdash$ b), sieht man, daß der Kalkül BFF sich zwar zur Urteilslogik ausbauen läßt, dafür aber - trotz seiner sonstigen Vorzüge - nicht besonders gut geeignet ist. Denn die hierzu notwendigen Regeln lassen sich ihres linearen Charakters wegen nicht sehr elegant in den mehrdimensionalen, typisch begriffslogischen Kalkül BFF einfügen. Deshalb haben wir für den Vergleich von Begriffs- und Urteilslogik den linearen Kalkül BGS als Grundlage gewählt. Man könnte aber auch alle Beweise in BFF führen. Ein Beweis der Abtrennungsregel in der Form $A,\ A \prec B \ \vdash\ B$ kann in $BFF^{\vdash}_{u}$ so geführt werden:

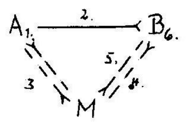
$A_1.$



B_6

1. Ann.
2. Ann.
3. u) aus 1.
4. 1.4 aus 2., 3.
5. 1.3
6. u) aus 5.

oder so:



§ 4 Logische und nichtlogische Kalküle

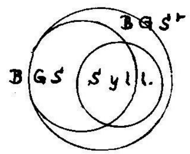
Bei dem logischen Kalkül BGS und seinen Spezialfällen konnte man beobachten, daß hier jedes der Beziehungszeichen $\leq$, $=$ auch als Verknüpfungszeichen verwendet wird. Das liegt daran, daß die Spezialisierungsregel Sp) für beliebige Formeln - also insbesondere für Beziehungsformeln - gilt. Schränkt man diese Regel so ein, daß Variablen nur noch durch Formeln ersetzt werden dürfen, die keine Beziehungzeichen enthalten, so erhält man einen nichtlogischen, verbandstheoretischen Kalkül ^{v}BGS. Bei diesem gibt es nun - was für nichtlogische Kalküle anscheinend charakteristisch ist - eine strenge Trennung zwischen Verknüpfungs- und Beziehungszeichen: Kein Beziehungszeichen kann als Verknüpfungszeichen auftreten und umgekehrt. Der Kalkül ^{v}BGS dürfte genau die in allen vollständigen Booleschen Verbänden gültigen Beziehungen ($\leq$, $=$) ableiten. Dabei entspricht a.b dem Infimum von a und b, a+b dem Supremum von a und b, $\prod_i a_i$ dem Infimum und $\sum_i a_i$ dem Supremum aller a_i.
Durch den eben erwähnten Zusammenhang zwischen Verknüpfungs- und Beziehungszeichen lassen sich logische und nichtlogische Kalküle also bereits rein syntaktisch unterscheiden.
Beide Arten von Kalkülen leiten zwar Formeln der Gestalt $A \leq B$, $A = B$ ab; im logischen Falle dürfen A und B beliebige Formeln sein, im nichtlogischen Falle dürfen A und B jedoch nur "Terme" sein, dh. Ausdrücke, die kein Beziehungszeichen enthalten.
Es gibt ein einfaches Rezept zur Gewinnung der Begriffslogik: Man wählt einen Kalkül mit dem Vokabular zB. von BGS, der

genau die bzgl. ., Π, +, Σ, - in allen vollständigen Booleschen Verbänden gültigen "Termgleichungen" s = t - wobei s und t Terme sind - ableitet, sowie die in diesen Verbänden gültigen Regeln, die nur Termgleichungen enthalten. (Man kann sich hier auf Gleichungen beschränken, da Subsumtionen stets in äquivalente Gleichungen umgeformt werden können.)
Erlaubt man, daß in diesem Kalkül die Variablen nicht nur durch Terme, sondern durch beliebige Formeln ersetzt werden dürfen, so erhält man einen Begriffskalkül.

Man könnte sich fragen, wie Kalküle aussehen müßten, die zB. die Klasse der singulären, der zweielementigen oder der atomaren (vollständigen) Booleschen Verbände repräsentieren. Diese Kalküle stünden in enger Beziehung zu den logischen Kalkülen $BGS^{\vdash}_1$, $BGS^{\vdash}_2$, $BGS^{\vdash}_a$.
Man könnte weiter untersuchen, in welchen Fällen es rein verbandstheoretische Kalküle gibt und in welchen Fällen man logische und nichtlogische Kalküle kombinieren muß etc.
Wir wollen diesen Fragen hier nicht weiter nachgehen.

§ 5 Historische Bemerkungen

Für die Geschichtsschreibung der Logik ergibt sich aufgrund unserer bisherigen Überlegungen die Aufgabe, in den einzelnen Epochen, aber auch bei einzelnen Logikern und Logikschulen begriffslogische und urteilslogische Denkweise aufzuspüren. und ihre jeweilige Auswirkung zu verfolgen.
In diesem Sinne wird man sagen dürfen, daß Aristoteles und mit ihm die scholastische und später die traditionelle Schullogik in erster Linie begriffslogisch ansetzte. Das zeigt schon die übliche Einteilung der Logik in die Lehre vom Begriff, Urteil und Schluß. Man behandelte jedoch nur einen Teil des Gesamtsystems der Begriffslogik, nämlich bestimmte Begriffsbeziehungen in Form der Syllogistik, die als Grundlage der gesamten Logik angesehen wurde. Die Begriffsverknüpfungen wurden daneben vernachlässigt. Will man die in den betreffenden Kalkülen ableitbaren Formeln durch Kreise symbolisieren, dann läßt sich die Stellung der Syllogistik etwa so angeben:



Anders verfuhr - etwas am Rande der logischen Tradition - hier Leibniz. Er dürfte bis auf die unendlichen Operationen fast alles für die Begriffslogik Wichtige gesehen und sogar in Kalküle gefaßt haben. Der Inhalt von Deduktions- und Abtrennungsregel war ihm vermutlich bekannt, da er die hypothetische Beziehung "Wenn A, dann B" als Subsumtion zwischen

den Beziehungsbegriffen A und B auffaßte. Daß Leibniz der Begriffslogik den Vorrang gab, entnimmt man nicht nur seiner Ansicht, daß die Gesetze der Logik in allen möglichen Welten gelten müßten, sondern auch der Tatsache, daß Leibniz im Prinzip schon wußte, wie man von der Begriffslogik zur Urteilslogik gelangen kann. Er stellte u. a. das Axiom
$A = (A \text{ est vera})$ auf, das unserem Theorem $\tilde{u}$) $A = (A = 1)$ entspricht.[39] Außerdem gab er bereits eine interessante Definition des Individualbegriffs.

Auch bei Boole und Jevons in England, sowie bei Schröder in Deutschland scheint die begriffslogische Betrachtungsweise noch im Vordergrund gestanden zu haben, obwohl man in Schröders Spätwerk eine Neigung zu urteilslogischem Denken bemerken kann.

Die Anfänge der Urteilslogik lassen sich bis in die Antike verfolgen, doch scheint es urteilslogische Systeme, die einen Vergleich mit der aristotelischen Syllogistik vertragen könnte nicht gegeben zu haben. Obwohl sich urteilslogische Überlegungen auch innerhalb der logischen Tradition häufig nachweisen lassen, muß doch Gottlob Frege als der eigentliche Begründer, ja geradezu Erfinder der Urteilslogik gelten.

Der Erfolg dieses Logiktypus gerade in den letzten fünfzig Jahren läßt sich wohl u. a. darauf zurückführen, daß die Urteilslogik von vornherein voll entwickelt und kalkülisiert zur Verfügung stand und so zum wichtigen Instrument, aber auch Untersuchungsgegenstand der in den Dreißigerjahren aufblühenden mathematischen Grundlagenforschung werden konnte.

Die philosophische Schullogik dagegen hatte es versäumt ihr begriffslogisches System weiter auszubauen und auf einen mit

dem der Urteilslogik vergleichbaren technischen Stand zu bringen.

Durch v. Freytag-Löringhoffs bisher nur teilweise publiziertes Werk dürfte das nun im wesentlichen nachgeholt worden sein.

Anmerkungen

1) vgl. Kauppi (1)

2) Auch die üblichen intuitionistischen Logiken sind - obwohl nicht zweiwertig - Urteilslogiken (vgl. S. 91).

3) Eine dritte Möglichkeit bestünde darin, nicht Begriffe oder Urteile, sondern das Schließen selbst als ein mechanisches Operieren mit Zeichen zum Gegenstand der Logik zu machen. Man erhält dann eine sog. "Kombinatorische Logik", wie sie von Schönfinkel und Curry begründet wurde. Man betrachtet hier verschiedene Arten von sog. Kombinatoren-Kalkülen, die zur Aufgabe haben, elementare Operationen mit Zeichen, insbesondere mit Funktionszeichen, darzustellen. Insofern handelt es sich hier - grob gesprochen - eher um eine allgemeine Kalkültheorie und der Name "Logik" ist etwas irreführend.
Zu den erwähnten Kalkülen kann man Zeichen hinzufügen, die einer logischen Deutung fähig sind. Je nach Wahl der dazugehörigen Regeln ergibt sich dann eine Begriffs-, Urteils- oder sonstige Logik.

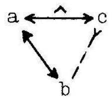
4) vgl. Frege (1), S. 5

5) vgl. S. 2, Fußnote 1).

6) vgl. v. Freytag-Löringhoff (1) - (3), v. Petzinger (1).

7) vgl. Wagner (1)

8) Man könnte die Regeln 1.61, 1.62 zu der Regel



zusammenfassen und Axiom 1.2 in der Form a $\overset{\wedge}{\longleftrightarrow}$ $\bar{a}$ beibehalten.
Bei dem vorliegenden Axiomensystem BFF

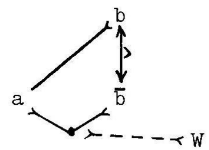
könnte bei 1.2 das Dach ($\wedge$) fehlen und bei 1.61, 1.62 sogar das ganze Zeichen $\overset{\wedge}{\longleftrightarrow}$.

9) "Frei" und "gebunden" ist wie üblich zu verstehen. Ein Index heißt <u>gebunden</u>, wenn er im Wirkungsbereich eines $\bullet\!\!\underset{i}{-\!\!-}\!\!<$ bzw. $\underset{i}{-\!\!-}\!\!\leftarrow\!\bullet$ steht, andernfalls heißt er <u>frei</u>; s. S. 31.

10) vgl. Anhang § 3.1, S. 123 f.

11) 1.1, 1.4, 1.7 definieren die Art-Gattungs-Beziehung als <u>Halbordnung</u> unter den Begriffen. 1.8, 1.8', 1.9, 1.9' besagen, daß Spezifikat und Generalisat jeweils das Infimum bzw. das Supremum bzgl. dieser Halbordnung bilden, und zwar zu je zwei oder aber beliebig vielen Begriffen.

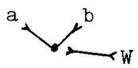
12) Satz 1) gilt auch, wenn man b und $\bar{b}$ vertauscht. Zum Beweis wird dann Regel 1.61 statt 1.62 verwendet. Ebenso gilt auch, wie man leicht sieht, die Umkehrung des Satzes:



13) Gentzensche Form, weil der Kalkül gemessen an der Zahl seiner Grundformeln relativ viele Grundregeln aufweist.

14) Bei 2.2' und 2.3' darf k ein beliebiger variabler, aber auch ein konstanter Index, zB. 0, 1, sein. Bei 2.8' und 2.9' dagegen darf i nur variabel sein.

15) Es kann vorkommen, daß eine Formel mehrere Übersetzungen besitzt, die dann aber gegenseitig auseinander herleitbar sind. So hat die BGS-Formel ab = 0 in BFF die beiden

Übersetzungen $a \longleftrightarrow b$ und 

16) vgl. Gentzen (1), S. 11.

17) $A_1 \ldots A_n \leqq B$ sei eine mindestens sekundäre Beziehungsformel. In später zu betrachtenden Erweiterungen des Kalküls BGS soll die Regel $\vdash$ a) auch auf Herleitungen angewandt werden, in denen die betreffenden Zusatzregeln oder auch die Regel $\vdash$ b) bereits angewandt worden sind.
Enthält eine der Hypothesen $A_1, \ldots, A_n$ einen freien Index (bzw. später eine freie Variable) und ist die Formel B unter Beachtung einer Indexbedingung (bzw. Variablenbedingung) erschlossen worden, so ist der betreffende Index (bzw. die betreffende Variable) in der Konklusion der Regel $\vdash$ a) durch ein Π zu binden (vgl. S. 90 f.). Beispiel:

(1)	$a_i \leqq b$	Ann.
(2)	$\sum\limits_i a_i \leqq b$	2.9' aus (1)
(3)	$\prod\limits_i (a_i \leqq b) \leqq (\sum\limits_i a_i \leqq b)$	$\vdash$ a) aus (1),(2); (1) beseitigt

18) Wenn einige der Formeln $A_1, \ldots A_n$ freie Indizes (bzw. freie Variablen) enthalten und dieselben Formeln in $A_1 \ldots A_n \leqq B$ auftreten, wobei jedoch der betreffende Index (bzw. die betreffende Variable) eventuell nach vorheriger Umbenennung durch ein Π gebunden ist, so soll man in diesem Falle auch B erschließen können (vgl. S. 90 f.).

19) Statt (1) bis (4) schreiben wir auch kürzer:

(n) $a \leqq b,\ b \leqq c \ \vdash\ a \leqq c$

(n+1) $(a \leqq b)(b \leqq c) \leqq (a \leqq c)$

ebenso statt (5) bis (8):

(n) $(a \leqq b)(a \nleqq c) \leqq (b \nleqq c)$

(n+1) $a \leqq b,\ a \nleqq c \ \vdash\ b \nleqq c$

20) Diese Vertauschbarkeit gilt natürlich nicht <u>innerhalb</u> beliebiger Formeln.

21) vgl. Hilfssatz 0/1'), Anhang, S. 103.

22) Im Rahmen der Kollektivtheorie sind diese Axiome äquivalent mit den Formeln, die innerhalb der Prädikatenlogik mit Identität den sog. Kennzeichnungsoperator ι definieren; vgl. Hilbert (1), I, S. 394.

23) Index- und Variablenbedingung: Kein in a freier Index darf in b frei vorkommen; a darf nicht frei in b vorkommen (vgl. S. 90). Wegen dieser Bedingungen lautet die Regel: "Wenn <u>jeder</u> Individualbegriff a^I ...". Sie entspricht gemäß $\vdash$ a), $\vdash$ b), S. 41, der Formel $\prod\limits_a (a^I \nleqq b) \leqq (b = 0)$.

24) Index- und Variablenbedingung: Kein in c freier Index darf in b frei vorkommen; c darf nicht frei in b vorkommen (vgl. S. 90).

25) vgl. Schröder (1), III. Löwenheim (2).

26) vgl. Hilbert (1), (2); v. Kutschera (2); Smullyan (1).

27) Bei 4.4, 4.5 darf y eine Individuenvariable, aber auch gegebenenfalls eine Individuenkonstante sein. Bei 4.7, 4.8 dagegen darf x nur eine Individuenvariable sein.

28) vgl. Lorenzen (2), S. 99.

29) vgl. Chang (1), S. 507 ff.

30) vgl. Kreisel (1); S. 211 werden verschiedene Mengenbe-

griffe diskutiert. Der Fall iii) Menge " als Abstraktion des allgemeinen Begriffes 'Eigenschaft': Eine Menge ist der Bereich aller Objekte mit einer gewissen Eigenschaft." scheint unserem "Kollektiv" sehr nahe zu kommen. Auf S. 233 heißt es, die Logik dieses Mengenbegriffes sei noch nicht genügend untersucht.

31) vgl. auch Russell (1), S. 22 ff.

32) Bei Anwendung der Regeln $\vdash$ a), $\vdash$ b) gilt jetzt zusätzlich das in den Fußnoten 17), 18) in Klammern über Variablen Gesagte.

33) vgl. Lorenzen (2), S. 93.

34) Die großen Buchstaben S und P vertreten hier aus Gründen der Tradition entgegen unserer früheren Festsetzung Begriffe und nicht Urteile; vgl. S. 65.

35) Die Sätze 36), 36') können als Beweis des Satzes vom reziproken Verhältnis von Inhalt und Umfang gelesen werden. Denn falls $S \triangleq P$ gilt, ist jeder Umfangsteil x von S auch Umfangsteil von P und jeder Inhaltsteil y von P ist auch Inhaltsteil von S. Dh. der Umfang der Art ist ganz im Umfang der Gattung und der Inhalt der Gattung ist ganz im Inhalt der Art enthalten.

36) Dies entspricht der Formel $\bigvee x\ (Sx \wedge \neg Px)$ in APL, wenn man Sx, Px liest als "x ist ein S", "x ist ein P".

37) vgl. Weyl (1). Weyl bezeichnet Existenzaussagen nicht als echte Urteile, sondern als "Urteilsanweisungen", etwa zu lesen als: "Man konstruiere ein x der Art, daß ...".

38) Hier wurde 27_u) für Beziehungsformeln A, B, C verwendet. Man befindet sich also, da u') vorausgesetzt wurde, in

$BGS^{\vdash}_{u'}$!

39) vgl. Kauppi (1), S. 169 ff.

Literaturverzeichnis

Behmann, H.: (1) The Paradoxes of Logic. Mind, 46 (1937), S. 218 - 221.

Bernays, P.: (1) und Fraenkel, A. A. Axiomatic Set Theory. Amsterdam 1968.

Birkhoff, G.: (1) Lattice Theory. Providence, 1961.

Bochenski, J. M.: (1) und Menne, A. Grundriß der Logistik. Paderborn 1973.

Curry, H. B.: (1) und Feys, R. Combinatory Logic. Amsterdam, I 1968, II 1972.

Chang, C. C.: (1) und Keisler, H. J. Model Theory. Amsterdam 1973.

Frege, G.: (1) Begriffsschrift. Darmstadt 1964.

Freytag-Löringhoff, Bruno Baron v.:

(1) Logik I, Stuttgart 1972, 5. Aufl.

(2) Logik II, Stuttgart 1967.

(3) und Petzinger, J.- M. v. Zur Logik der Individualbegriffe. Z. f. phil. Forschung 28 (1974), Heft 3, S. 443 - 454.

(4) Eine vorläufige Mitteilung über ein Verfahren, Theorien und dergleichen mit Hilfe eines Computers logisch zu untersuchen. Z. f. phil. Forschung, 24 (1970), Heft 3, S. 443 - 449.

Gentzen, G.: (1) Untersuchungen über das logische Schließen. Darmstadt 1969.

Grelling, K.: (1) The Logical Paradoxes. Mind 45 (1936), S. 481 - 486.

Gericke, H.: (1) Theorie der Verbände. Mannheim 1963.

Halmos, P. R.: (1) Algebraic Logic. New York 1962.

(2) Lectures on Boolean Algebras. London 1973.

(3) Naive Set Theory. Princeton 1960.

Hermes, H.: (1) Einführung in die Verbandstheorie. Berlin 1955.

Hilbert, D.: (1) und Ackermann, W. Grundzüge der theoretischen Logik. Berlin 1972, 6. Aufl.

(2) und Bernays, P. Grundlagen der Mathematik I, II. Berlin 1968, 2. Aufl.

(3) Über das Unendliche. Math. Annalen 88 (1923), S. 151 - 165.

Hindley, J. R.: (1) und B. Lercher, S. P. Seldin. Introduction to Combinatory Logic. London 1972.

Historisches Wörterbuch der Philosophie. Hrsg. J. Ritter. Bd. 1, Basel 1971.

Jacoby, G.: (1) Allgemeine Ontologie der Wirklichkeit I, II, III. Halle a. d. S., 1925/1955.

Kauppi, R.: (1) Über die Leibnizsche Logik. Helsinki 1960.

(2) Einführung in die Theorie der Begriffssysteme. Tampere 1967.

Korselt, A.: (1) Paradoxien der Mengenlehre. Jahresber. D. M. V. 15 (1906), S. 215 - 219.

(2) Auflösung einiger Paradoxien. Jahresber. D. M. V. 25 (1916-17), S. 132 - 138.

Kreisel, G.: (1) und Krivine, J.- L. Modelltheorie. Berlin 1972.

Kutschera, F. v.: (1) Die Antinomien der Logik. Freiburg 1964.

(2) und Breitkopf. Einführung in die moderne Logik. München 1971.

Löwenheim, L.: (1) Über Möglichkeiten im Relativkalkül. Math. Annalen 76 (1915), s. 447 - 470.
(2) Einkleidung der Mathematik in Sch röderschen Relativkalkül. JSL 5 (1940), S. 1 f.

Lorenzen, P.: (1) Metamathematik. Mannheim 1962.
(2) Formale Logik. Berlin 1967, 4. Aufl.

Lyndon, R. C.: (1) Notes on Logic, Princeton 1967.

Menne, A.: (1) Logik und Existenz. Meisenheim 1954.

Meschkowski, H.: (1) Wandlungen des mathematischen Denkens. Braunschweig 1969.

Petzinger, J.- M. v.: (1) Logik im Abriß. Meisenheim 1973, 2. Aufl.
(2) s. v. Freytag-Löringhoff (3).

Ponasse, D.: (1) Mathematical Logic. New York 1973.

Quine, W. V. O.: (1) Mengenlehre und ihre Logik. 1973

Russell, B.: (1) Einführung in die mathematische Philosophie, Darmstadt

Rüstow, A.: (1) Der Lügner. Theorie, Geschichte und Auflösung. Leipzig 1910.

Schmidt, J.: (1) Axiomatische Mengenlehre I. Mannheim 1966.

Schwabhäuser, W.: (1) Modelltheorie I, Mannheim 1971.

Sikorski, R.: (1) Boolean Algebras. Berlin 1964, 2. Aufl.

Smullyan, R.: (1) First Order Logic. Berlin 1968.

Schönfinkel, M.: (1) Über die Bausteine der mathematischen Logik. Math. Annalen 92 (1924), S. 314 f.

Schoenflies, A.: (1) Über logische Paradoxien der Mengenlehre. Jahresber. D. M. V. 15 (1906), S. 19 - 25.
(2) Über eine vermeintliche Antinomie der Mengenlehre.

Acta math. 32 (1909), S. 177 - 184.

Schröder, E.: (1) Vorlesungen über die Algebra der Logik I - III. New York 1966.
(2) Abriß der Algebra der Logik. Hrsg. E. Müller. New York 1966.
(3) Der Operationskreis des Logikkalküls. Darmstadt 1966.

Schütte, K.: (1) Beweistheorie. Berlin 1960.

Schulte Mönting, J.: (1) Die algebraische Bedeutung der Schnittelimination nebst Anwendungen auf Wortprobleme. Diss. Tübingen 1973.

Tarski, A.: (1) Zur Grundlegung der Booleschen Algebra I. Fundamenta mathematicae.24 (1935), S. 179 - 198.

Vladimirow, D. A.: (1) Boolesche Algebren. Berlin 1972.

Wagner, K.: (1) Graphentheorie. Mannheim 1970.

Wandschneider, D.: (1) Zum Antinomienproblem der Logik. Ratio 16 (1974), Heft 1, S. 74 - 91.

Weyl, H.: (1) Über die neue Grundlagenkrise der Mathematik. Darmstadt 1965.

Zahn, P.: (1) Eine Verteidigung des Tertium-non-datur. Technische Hochschule Darmstadt, Preprint Nr. 15, 1972.

L e b e n s l a u f

Am 29. 08. 1948 wurde ich, Johann-Michael v. Petzinger, als einziges Kind des Ingenieurs Johann-Dietrich v. Petzinger (1910-1974) und seiner Ehefrau Irmgard, geb. Jacobi, in Berlin-Schmargendorf geboren. Nach dem Besuch der Zinnowwaldschule (Grundschule) in Berlin-Zehlendorf von 1955 bis 1959 besuchte ich bis zur Reifeprüfung im Februar 1968 den altsprachlichen Zweig des humanistischen Canisius-Kolleg-Gymnasiums in Berlin-Tiergarten.

Nach einem dreitrimestrigen Vorstudium am Leibniz-Kolleg der Universität Tübingen von April 1968 bis April 1969 studierte ich an der Universität Tübingen zunächst ab WS 1968/69 Mathematik, dann ab SS 1969 Mathematik und Philosophie, besuchte aber auch Veranstaltungen über Experimentalphysik, Geschichte der Naturwissenschaften, Rechtsphilosophie, Psychologie und Elektronische Datenverarbeitung. Nach im SS 1970 bestandener Zwischenprüfung für das Lehramt an Gymnasien in den Hauptfächern Mathematik und Philosophie war ich bis SS 1972 als Wissenschaftliche Hilfskraft bei Prof. v. Freytag-Löringhoff tätig, arbeitete während dieser Zeit mit an theoretischen Problemen der v. Freytag-Löringhoffschen Logik sowie an Fragen des Einsatzes von EDV zu logischen Zwecken. Außerdem hielt ich Logik-Tutorien.

Im April 1975 promovierte ich zum Dr. phil.

Meine akademische Ausbildung verdanke ich den Herren Professoren und Dozenten

Essler, v. Freytag-Löringhoff, Gölz, Hartmann, Schulz, Simon, Stern in Philosophie,

Aigner, Barner, Betsch, Betten, Felscher, Fischer, Radbruch, Schmid, Salzmann, Wielandt in Reiner Mathematik,

Baumann, Beekmann, Gönnenwein, Wolf in Angewandter Mathematik und Physik,

Schramm in Geschichte der Naturwissenschaften,

Esser in Rechtsphilosophie,

Glaser in Psychologie.

Besonderen Dank schulde ich meinem Doktorvater Herrn Prof. v. Freytag-Löringhoff, der meine Studien von Anfang an mit großer Geduld betreute, Herrn Prof. Radbruch, der durch seine ausgezeichneten Lehrveranstaltungen mein Interesse für Mathematik weckte, und Herrn Prof. Felscher, der mir durch unermüdlich vorgebrachte Einwände wertvolle Anregungen gab.

Bisherige Veröffentlichungen:

1) Logik im Abriß. Meisenheim/Glan, 2. Aufl. 1973.
2) mit v. Freytag-Löringhoff, Bruno Baron:
   Zur Logik der Individualbegriffe. Z. f. phil. Forschung 28 (1974), Heft 3, S. 443 - 454.