Zum Rückschluß auf verborgene Prämissen

Johann - Michael v. Petzinger

1978

übertragen und überarbeitet
durch:

Andreas Otte
in Zusammenarbeit mit
J.-M. v. Petzinger

Februar/März 1990

1 Allgemeines

Gelegentlich begegnet man der Behauptung, aus gewissen Voraussetzungen folge logisch ein bestimmter Schlußsatz, muß dann aber feststellen, daß der beanspruchte Folgerungszusammenhang tatsächlich gar nicht besteht. So kann es einem etwa bei Diskussionen ergehen, bei der Prüfung juristischer Entscheidungsbegründungen, bei der Analyse scholastischer Argumentationen, aber auch bei dem Studium mathematischer Beweise.
Da man sich im Alltag – auch im wissenschaftlichen – fragmentarisch auszudrücken pflegt, also selbstverständlich erscheinende Voraussetzungen und Beweisschritte einfach wegläßt, gibt diese Beobachtung keinen Anlaß zur Beunruhigung. Unter Umständen kann es jedoch interessant sein, einen solchen lückenhaften Gedankengang, ein sog. Enthymen, zu einem vollständigen Beweis zu ergänzen, d.h. hier: weitere Voraussetzungen aufsuchen, mit deren und der ursprünglichen Prämissen Hilfe die betreffende Konklusion dann tatsächlich beweisbar wird.
Dieses Vorgehen nennen wir den „Rückschluß auf verborgene bzw. verschwiegene Prämissen“[1].
Dabei wird man sich nicht mit irgendeinem beliebigen System von Prämissen begnügen, die das Gewünschte leisten, sondern wird nach logisch möglichst schwachen Annahmen suchen, also solchen, die in einem später noch genauer zu umgrenzenden Sinne „minimal“ sind.
Etwas technischer ausgedrückt:
Gegeben sei ein beliebiger Kalkül K (eine kalkülisierte bzw. formalisierte Theorie o.ä.) sowie die Tatsache, daß aus einem System von Kalkülausdrücken A zusammen mit einem weiteren solchen System X ein anderes System von Ausdrücken B beweisbar ist; in Zeichen:

$$A, X \vdash_{\mathrm{K}} B^2$$

Im einfachsten Fall vertreten A und B jeweils einen einzigen Ausdruck.

[1] Vgl. [1, 2], [3, S. 131 ff], [4, S. 108 ff], [5, S. 49 ff].
[2] Der Index K kann fehlen, wenn klar ist, um welchen Kalkül es sich handelt, oder wenn von beliebigen Kalkülen die Rede ist.

Hierbei seien A und B bekannt, X sei „unbekannt“ und damit „gesucht“. B sollte – von trivialen Sonderfällen abgesehen – nicht aus X alleine folgen, d.h. zur Ableitung von B sollte A i.a. tatsächlich mitbenutzt werden[3]. Das Verhältnis von A und B ist beliebig.

2 Hinweise zum syllogistischen Rückschluß

Im Rahmen der klassischen Syllogistik hat v. Freytag Löringhoff das vorliegende Problem behandelt[4].

Die Ausgangslage ist hier: $sR_1p,\ X\ \vdash_{\mathrm{Syll}}\ qR_2r$

(wobei „Syll“ ein speziell auf die Syllogistik zugeschnittener o.ä. Kalkül sei)
Die Variablen s, p, q, r stehen für beliebige Begriffsausdrücke; R_1, R_2 für beliebige der syllogistischen Relationen a, e, i, o (bzw. auch noch ä, ë, ï, ö, sofern man alle möglichen (einfachen) Begriffsbeziehungen ins Spiel bringen will, aber keine Termnegation zur Verfügung hat). Die Lösung darf die Variablen höchstens negiert, aber keine anderen Operationszeichen enthalten.

3 Der Kalkül $\mathrm{BL}^{\vdash}$

Wir wollen das Rückschlußproblem hier für die sog. Reine Begriffslogik behandeln und legen dafür den Kalkül $\mathrm{BL}^{\vdash}$ zugrunde[5]. Kurz gesagt handelt es sich dabei um eine Boolesche Algebra, deren Ausdrucks– und Beweismöglichkeiten zum Zwecke der Deutung gerade als Logik etwas erweitert worden sind; u.a. mit der Folge, daß in diesem Kalkül auch verneinte Beziehungen $a \nleq b$, $a \neq b$ behandelt werden können.
Der Anschaulichkeit halber werden wir je nach Bedarf im Folgenden die v. Freytag Löringhoffsche und die Boole–Schrödersche Symbolik[6], aber auch die Diagramme von Venn benutzen.

4 Minimalitätsbedingungen

Zur Einführung diene ein Beispiel aus der Syllogistik, dem der Modus Barbara zugrundeliegt[7]:

$$\begin{array}{rcccc} \text{Alle } a \text{ sind } b, & X & \vdash & \text{Alle } a \text{ sind } c \\ a\,\mathrm{a}\,b, & X & \vdash & a\,\mathrm{a}\,c \\ a \leq b, & X & \vdash & a \leq c \end{array}$$

Hier lautet die syllogistische Lösung X_{syll} nach v. Freytag Löringhoff:

$$X_{\mathrm{syll}}: \quad b \leq c$$

Ersichtlich gilt: $a \leq b,\ b \leq c\ \vdash\ a \leq c$. Aber ist diese Lösung irgendwie minimal?
Im Vennschen Umfangsdiagramm[8] (s. Abb. 1) sieht das so aus:

[3] Damit ist verträglich, daß eine minimale Lösung X_{m} (siehe Abschnitte 4 und 5), aus der allein im allgemeinen Falle die Konklusion nicht folgt, sich im besonderen als mit B äquivalent erweist; womit sich zugleich die Aufgabe stellt, notwendige und hinreichende Bedingungen dafür anzugeben, daß dieser Fall eintritt.

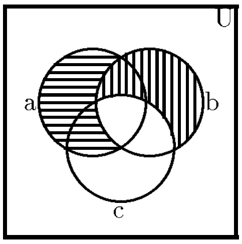
[4] Vgl. [3, S. 131 ff].

[5] Dieser unterscheidet sich von dem in [8, S. 28 ff, S. 40 ff] verwendeten Kalkül $\mathrm{BGS}^{\vdash}$ nur dadurch, das dessen Axiom 2.4 $\vdash\ a = ab + a\overline{b},\ a = (a+b)(a+\overline{b})$ äquivalent durch die Regeln $a \leq b\ \dashv\vdash\ a\overline{b} \leq 0$ und $a \leq \overline{b}\ \dashv\vdash\ ab \leq 0$ ersetzt ist.
Wie man diesen Kalkül durch bestimmte Zusätze bis zur (vollen) Urteilslogik $\mathrm{BL}^{\vdash}_{\mathrm{u}}$ (äquivalent mit Aussagen– und Prädikatenlogik) erweitert, wird in [8, S. 64 ff] gezeigt.

[6] Zur Äquivalenz jeweils zugehöriger Kalküle vgl. [8, S. 32 ff].

[7] Eine nach Peirce sog. „Abduktion“, vgl. [3, S. 131].

[8] Man könnte ebensogut Inhaltsdiagramme verwenden, vgl. [4, S. 64 ff].



= $a \leq b$
|| $b \leq c$

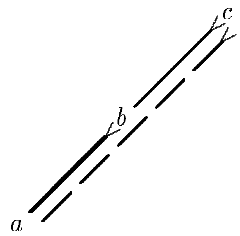
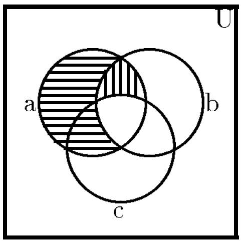


Abb. 1

Aus dem Diagramm entnimmt man ohne weiteres, daß die syllogistische Lösung sozusagen zu viel liefert. Um aus $a \leq b$ $a \leq c$ zu gewinnen, genügt folgende Schraffierung (siehe Abb. 2):



= $a \leq b$
|| $ab \leq c$

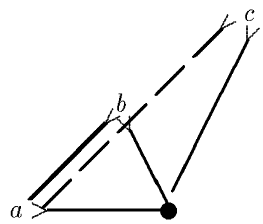
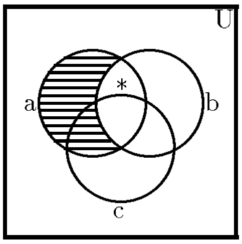


Abb. 2

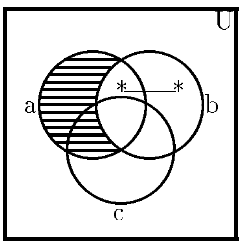
Die Lösung $ab \leq c$ ist – wie auch aus dem Diagramm unmittelbar ersichtlich – echt schwächer als die syllogistische, denn aus $b \leq c$ folgt $ab \leq c$, aber nicht umgekehrt.
Im anschaulichen, durch das Venn–Diagramm gegebenen Sinne ist sie auch am schwächsten, denn für den Fall, daß $ab \leq c$ nicht, also $ab \not\leq c$ gilt, ist $a \leq c$ aus $a \leq b$ nicht zu beweisen (siehe Abb. 3).



* $ab \not\leq c$

Abb. 3

Dies gilt nicht für die syllogistische Lösung $b \leq c$, was man sich ebenfalls leicht am Venn–Diagramm klar macht. Denn angenommen, $b \leq c$ gelte nicht, also $b \not\leq c$, so ist diese Lage immer noch mit $ab \leq c$ (siehe Abb. 2) verträglich (siehe Abb. 4):



—— („* oder *“) $b \not\leq c$

Abb. 4

Als „V(enn)–minimal“ wollen wir im folgenden eine Lösung des Rückschlußproblems bezeichnen, die sich durch Betrachtung eines zugehörigen Venn–Diagramms als zur Gewinnung der Konklusion unerläßlich erweist.
Eine andere Möglichkeit bestünde darin, „minimal (schlechthin)“ eine Lösung zu nennen, die relativ zum bekannten Prämissensystem A bzgl. der Ableitbarkeitsbeziehung „$\vdash$“ schwächer ist als alle anderen Lösungen.
Wir definieren daher folgendermaßen (mit einem Nachtrag den Begriff „Lösung“ betreffend):

a) „X ist Lösung des Rückschlußproblems (relativ zu A, B und zum Kalkül K)“, genau wenn gilt:
$A, X \vdash_{\mathrm{K}} B$.
(„B ist aus A und X im Kalkül K beweisbar“)

b) „X ist minimal“, genau wenn gilt:
Für alle Y: Wenn $A, Y \vdash_{\mathrm{K}} B$, dann $A, Y \vdash_{\mathrm{K}} A, X$.
(„ Alle Lösungen Y haben zusammen mit A im Kalkül K A und X zur Folge“)

Diese Bedingung ist – wie sich leicht zeigen läßt[9] – äquivalent mit der einfacheren: $A, B \vdash_{\mathrm{K}} X$, die wir daher im folgenden benutzen werden, so daß sich aus a) und b) ergibt:

„X ist minimale Lösung des Rückschlußproblems (relativ zu A, B, K)“, genau wenn gilt: $A, X \vdash_{\mathrm{K}} B$ und $A, B \vdash_{\mathrm{K}} X$[10].

5 Minimaler Rückschluß im Kalkül BL$^{\vdash}$

Wir betrachten nun die vier möglichen Fälle[11], bei denen als bekannt genau eine Prämisse und eine Konklusion der Gestalt $x \leq y$ oder $x \nleq y$[12] auftreten. Die syllogistischen Lösungen (X_{s}^1, X_{s}^2 etc.) und die minimalen (X_{m}) besitzen dieselbe Gestalt und erfüllen die Bedingung, daß in x und y kein Beziehungszeichen, also $\leq$ oder $=$, enthalten ist, sofern dies nur für a, b, c, d gilt.

1	aa	$a \leq b, X \vdash c \leq d$	X_{s}^1:	$c \leq a,\ b \leq d$
			X_{s}^2:	$1 \leq a + d,\ b \cdot c \leq 0$[13]
			X_{m}:	$c \leq a + d,\ b \cdot c \leq d$[14]
2	ao	$a \leq b, X \vdash c \nleq d$	X_{s}^1:	$a \nleq d,\ b \leq c$
			X_{s}^2:	$a \cdot c \nleq 0,\ b \cdot d \leq 0$
			X_{s}^3:	$1 \leq a + c,\ 1 \nleq b + d$
			X_{s}^4:	$d \leq a,\ c \nleq b$
			X_{m}:	$(a \cdot \overline{b}) + (c \cdot \overline{d}) \nleq 0$
3	oa	$a \nleq b, X \vdash c \leq d$		Hier scheint es keine Lösung zu geben[15].

[9] Unter Verwendung folgender Axiome für „$\vdash$“:
1) $A, B \vdash A$
$A, B \vdash B$
2) Wenn $A \vdash B$ und $B \vdash C$, dann $A \vdash C$.
3) Wenn $A \vdash B$ und $A \vdash C$, dann $A \vdash B, C$.
A, B, C sind (eventuell leere) Systeme von Kalkül–Ausdrücken.
Die eine Richtung der zu beweisenden Äquivalenz erhält man ohne weiteres durch Anwendung der Minimalitätsdefinition b) („Für alle Y: …“) auf B.

[10] Definiert man: $A\, R_{\mathrm{C}}\, B$ genau wenn $A, C \vdash B$ und
$A\, R_{\mathrm{C}}^{'}\, B$ genau wenn $A, C \vdash B$ und $B, C \vdash A$,
so wird R_{C} eine sog. Quasi–Ordnung und $R_{\mathrm{C}}^{'}$ eine Äquivalenzrelation.
Ähnlich kann man auch BL$^{\vdash}$–intern definieren:
$a \overset{\leq}{\underset{\mathrm{C}}{}} b \ :\dashv\vdash\ ac \leq b$ und $a \overset{=}{\underset{\mathrm{C}}{}} b \ :\dashv\vdash\ ac \leq b,\ bc \leq a$; es gilt dann: $a \overset{\leq}{\underset{1}{}} b \ \dashv\vdash\ a \leq b$ sowie $a \overset{=}{\underset{1}{}} b \ \dashv\vdash\ a = b$.

[11] Da man im Kalkül BL$^{\vdash}$ über Termnegation verfügt und daher alle syllogistischen Relationen a, e, …, ö ausdrücken kann, sind durch die Fälle 1 – 4 alle hier in Frage kommenden Möglichkeiten erschöpft.

[12] Gleichungen und negierte Gleichungen brauchen nicht gesondert behandelt werden, da sie sich in der Boole–Schröderschen Algebra bzw. in der Begriffslogik bekanntlich auf jeweils äquivalente 0–(bzw. 1–)Subsumtionen bringen lassen:
$x = y \ \dashv\vdash\ x\overline{y} + \overline{x}y \leq 0$ $\qquad x \neq y \ \dashv\vdash\ x\overline{y} + \overline{x}y \nleq 0$

4	oo	$a \not\leq b,\, X \ \vdash\ c \not\leq d$	X_s^1:	$a \leq c,\, d \leq b$
			X_s^2:	$a \cdot d \leq 0,\, 1 \leq b + c$
			X^*:	$a \leq b + c,\, a \cdot d \leq b$

.

5.1 Zur Begründung

Da sich unverneinte wie verneinte Subsumtionen $a \leq b$ bzw. $a \not\leq b$ jeweils in äquivalente Null–Subsumtionen $a\overline{b} \leq 0$ bzw. $a\overline{b} \not\leq 0$ umformen lassen[16], reduzieren sich die Fälle 1 – 4 auf folgende (mit $a\overline{b}$ für r und $c\overline{d}$ für s):

1'	$r \leq 0 \ \vdash\ s \leq 0$	X_m:	$s \leq r$
2'	$r \leq 0 \ \vdash\ s \not\leq 0$	X_m:	$r + s \leq 0$
3'	$r \not\leq 0 \ \vdash\ s \leq 0$		
4'	$r \not\leq 0 \ \vdash\ s \not\leq 0$	X^*:	$r \leq s$

Ein Blick auf die zugehörigen Venn–Diagramme lehrt (Abb. 6 – 8a), daß die Lösungen 1', 2' und 4' Venn–minimal sind, wobei allerdings die Lösung 4' zuviel liefert: $rs \not\leq 0$, an Stelle von $s \not\leq 0$. Lösung 4' ist jedoch nicht minimal, da $r \not\leq 0,\, s \not\leq 0 \ \vdash\ r \leq s$ nicht gilt.

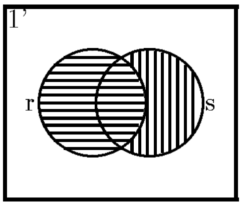


Abb. 5

$r \leq 0,\, s \leq r \ \vdash\ s \leq 0$

= ||

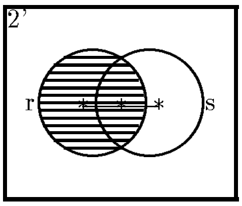


Abb. 6

$r \leq 0,\, r + s \not\leq 0 \ \vdash\ s \not\leq 0$[17]

= *—*—* * (im Bereich $\overline{r}s$)

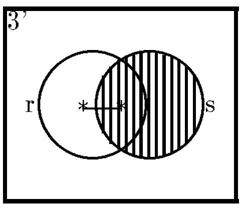


Abb. 7

$r \not\leq 0,\, ? \ \vdash\ s \leq 0$[18]

— ||

---

[13] Dies entspricht $a\,\ddot{\mathrm{e}}\,d,\, b\,\mathrm{e}\,c$. Da die Syllogistik im klassischen Sinne weder 0 noch 1 kennt, sollte man vielleicht lieber $\overline{a} \leq d$ und $b \leq \overline{c}$ o.ä. schreiben. Wir bevorzugen i.a. die termnegationsfreie Schreibweise oder eine solche, die den Zusammenhang von syllogistischer und minimaler Lösung zu verdeutlichen geeignet erscheint.

[14] Diese Lösung gilt auch schon für distributive Verbände bzw. Begriffslogiken. Distributivität ist aber wohl erforderlich, da man zum bequemen Nachweis der Lösungseigenschaft die sog. Schnittregel (vgl. [7]) zu benötigen scheint.

Die angegebene Lösung erledigt auch gleich den allgemeinen Fall mit n Prämissen und m Konklusionen: $a_1 \leq b_1, \ldots, a_n \leq b_n,\, X \ \vdash\ c_1 \leq d_1, \ldots, c_m \leq d_m$, da man Subsumtionen stets in äquivalente 0–Subsumtionen umformen und diese dann in eine einzige zusammenfassen kann (Beweis mit vollständiger Induktion).

[15] Abgesehen von der trivialen Lösung $X = B$, hier also $X_m := c \leq d$. $X_m = B$ ist im Übrigen eine minimale Lösung für alle vier Fälle, hier allerdings die einzig mögliche.

[16] Vgl. [8, S. 31 unten, S. 35 Theorem 16), dabei c durch 0 ersetzt, S. 47 Theorem 21)].

[17] Die Venn–Minimalität der Lösung ersieht man daraus, daß es keine Möglichkeit gibt, zu den mit „–" verbundenen Sternchen ein weiteres hinzuzufügen und damit $r + s \not\leq 0$ abzuschwächen, ohne damit zugleich die Beweisbarkeit der Konklusion $s \not\leq 0$ aufzugeben.

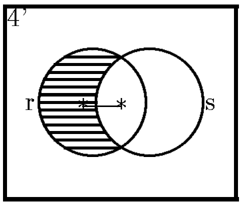


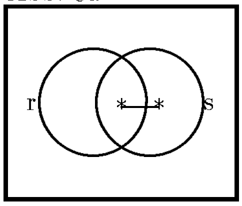
Abb. 8

$r \not\leq 0,\, r \leq s \;\vdash\; s \not\leq 0$

$*\!\!-\!\!*$ = $*$

(im Bereich rs)

Abb. 8a



$s \not\leq 0$

Die Minimalität der Lösungen für 1' und 2' sieht man so:

1': Zu zeigen ist $A,\, B \;\vdash\; X$; d.h. $r \leq 0,\, s \leq 0 \;\vdash\; s \leq r$.
Wegen des Axioms $0 \leq r$ gilt aber schon $s \leq 0 \;\vdash\; s \leq r$, also $B \;\vdash\; X$; also erst recht $A,\, B \;\vdash\; X$.
2': Auch hier gilt bereits $B \;\vdash\; X$; d.h. $s \not\leq 0 \;\vdash\; r + s \not\leq 0$, wegen $r + s \leq 0,\, s \leq r + s \;\vdash\; s \leq 0$ nach BL$^{\vdash}$–Theoremen[19].

Zur Lösung des Falles 1 aa kann man – abgekürzt – auf folgendem Wege gelangen:

$$
\begin{array}{llll}
a \leq b,\, X \;\vdash\; c \leq d & & & \\
a\overline{b} \leq 0,\, X \;\vdash\; c\overline{d} \leq 0 & X_{\mathrm{m}}: & c\overline{d} \leq a\overline{b} & \text{nach 1' s.o.} \\
& \text{hieraus:} & c\overline{d} \leq a,\; c\overline{d} \leq \overline{b} & \\
& & c \leq a + d,\; \overline{b}c \leq d^{20} &
\end{array}
$$

Jeweils nach bekannten Regeln der Booleschen Algebra.

Die Lösung des vierten Falles oo kann auf die des ersten aa zurückgeführt werden:

$$
\begin{array}{l}
a \not\leq b,\, X \;\vdash\; c \not\leq d \\
c \leq d,\, X \;\vdash\; a \leq b
\end{array}
$$

und weiter wie oben, oder aber

$$
\begin{array}{ll}
a \not\leq b,\, X \;\vdash\; c \not\leq d & \\
a \cdot \overline{b} \not\leq 0,\, X \;\vdash\; c \cdot \overline{d} \not\leq 0 & \\
& X^{*}:\; a \cdot \overline{b} \leq c \cdot \overline{d} \quad \text{nach 4' s.o.}
\end{array}
$$

Auch der zweite Fall ao wird ähnlich behandelt:

$$
\begin{array}{ll}
a \leq b,\, X \;\vdash\; c \not\leq d & \\
a \cdot \overline{b} \leq 0,\, X \;\vdash\; c \cdot \overline{d} \not\leq 0 & X_{\mathrm{m}}:\; a \cdot \overline{b} + c \cdot \overline{d} \not\leq 0 \quad \text{nach 2' s.o.}
\end{array}
$$

wobei man die Lösung 2' unmittelbar aus dem Venn–Diagramm oder aus der BL$^{\vdash}$–Regel (Satz) $r \leq 0,\, r + s \not\leq 0 \;\vdash\; s \not\leq 0$[21] entnehmen kann, die sich auf die Boolesche Regel $r \leq 0,\, s \leq 0 \;\vdash\; r + s \leq 0$ stützt.

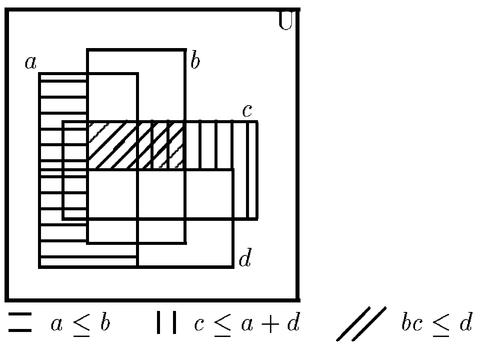
Im übrigen kann man die Lösungen auch unmittelbar den Venn–Diagrammen für vier Begriffe entnehmen, z.B. im Falle aa:

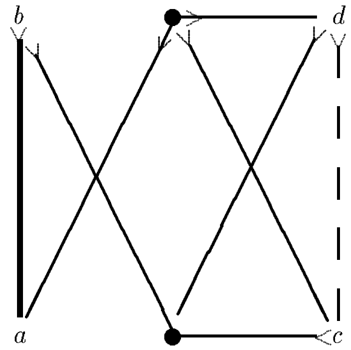
[18] Triviale Sonderlösung ist hier, wie schon oben angemerkt, die Konklusion selbst, also $s \leq 0$. Diese Lösung ist auch Venn-minimal. Über die Brauchbarkeit dieser Lösung kann man natürlich streiten.

[19] Vgl. [8, S. 41 f].

[20] Vgl. [8, S. 35 Theorem 16)].

[21] Vgl. [8, S. 41 f].





Mit dem Nebenergebnis, daß sich die minimale Lösung auch darstellen läßt als $abc \le d$, $bc \le a+d$, $c \le a+b+d$.

6 Teilminimalisierung

Wem aus irgendwelchen Gründen die jeweils minimale Lösung des Gesamtproblems $A,\ X\ \vdash\ B$ nicht gefällt, der kann einen anderen Weg einschlagen, den wir „Teilminimalisierung“ nennen wollen.
Hierzu hat man sich mit Hilfe eines syllogistischen Lösungspaares einen Beweis herzustellen und dann bei jedem Beweisschritt die Minimallösung einzuführen; z.B. im Falle ao mit der ersten syllogistischen Lösung (siehe Abschnitt 5) $a \le b,\ a \not\le d,\ b \le c\ \vdash\ c \not\le d$:

Der Beweis

$$\dfrac{\dfrac{a \le b \quad b \le c}{a \le c} \qquad a \not\le d}{c \not\le d}$$

geht über in

$$\dfrac{\dfrac{a \le b \quad ab \le c}{a \le c} \qquad a\overline{c} + c\overline{d} \not\le 0}{c \not\le d}$$

Als Lösung ergibt sich hier $ab \le c$, $a\overline{c} + c\overline{d} \not\le 0$ im Gegensatz zur (Gesamt–)Minimallösung $a\overline{b} + c\overline{d} \not\le 0$. Sinngemäße Anwendung dieses Verfahrens auf die übrigen Fälle liefert eine Vielzahl von „teilweise“ minimalen Lösungen.

Gibt man die Einschränkung auf, daß die als Lösungen auftretenden positiven oder negativen Subsumtionen $x \le y$ bzw. $x \not\le y$ weder in x noch in y Beziehungszeichen, also $\le$ oder $=$, enthalten dürfen, so besitzt jedes Rückschlußproblem $A,\ X\ \vdash\ B$ die (triviale) Lösung: $A \le B$ wegen der Gültigkeit der $BL^{\vdash}$– Abtrennungsregel. In dem Kalkül der „gemischten Begriffslogik“[22] $BL^{\vdash}_{u'}$ läßt sich diese Lösung auch als minimal erweisen, weil hier unter bestimmten Bedingungen $B\ \vdash\ A \le B$ gilt.
Die Lösung $A \le B$ ist in $BL^{\vdash}_{u'}$ mit den schon bekannten Minimallösungen jeweils äquivalent relativ zu A, d.h. es gilt:

$A,\ A \le B\ \vdash\ X_{\mathrm{m}}$ und $A,\ X_{\mathrm{m}}\ \vdash\ A \le B$; z.B. im Falle aa:
$a \le b,\ (a \le b) \le (c \le d)\ \vdash\ c\overline{d} \le a\overline{b}$ sowie
$a \le b,\ c\overline{d} \le a\overline{b}\ \vdash\ (a \le b) \le (c \le d)$;

wie überhaupt zwei verschiedene minimale Lösungen relativ zu A stets äquivalent sind[23].
Wollte man das Rückschlußproblem in der (vollen) Urteilslogik, etwa im Kalkül $BL^{\vdash}_{u}$ studieren, so wäre es sinnvoll, beliebige Ausdrücke, etwa auch solche der Gestalt $U+V$, $\prod_{\mathrm{i}} A_{\mathrm{i}}$ etc. zuzulassen[24].

[22] Vgl. [8, S. 71 ff].
[23] Vgl. Fußnote 9).
[24] Schon in $BL^{\vdash}_{u'}$ ist z.B. $(r \le s) + (s \not\le 0)$ eine minimale Lösung für den Fall 4' (siehe Abschnitt 5). Im übrigen läßt sich jede Lösung X durch Addition der Konsequenz B „zwangsminimalisieren“.

7 Anwendungen

Neben seiner theoretischen[25] könnte das Rückschlußverfahren auch praktische Bedeutung erlangen bei der „Reparatur“ von Fehlschlüssen aller Art. Bei der Barbara-Quarternio etwa sieht die Lage so aus:
$a \leq b,\, b^* \leq c,\, X \;\vdash\; a \leq c \qquad X_{\mathrm{m}}\!: \quad ab \leq b^* + c$
Diese Lösung ist um einiges schwächer als andere sich anbietende wie etwa $b \leq b^*$ oder gar $b = b^*$.

Ein anderer Fehlschluß (etwa als vermeintliche Celarent–Anwendung zu deuten) könnte folgendermaßen behandelt werden:

$a \leq b,\, ac \leq 0,\, X \;\vdash\; bc \leq 0 \qquad X_{\mathrm{m}}\!: \quad bc \leq a,$

wobei die Lösung ohne Benutzung der Prämisse $a \leq b$ die Konklusion $bc \leq 0$ liefert.

Angewandt auf die Frage nach der Gültigkeit der Subalternation und gewisser „angefochtener“ syllogistischer Modi liefert unser Verfahren folgende Ergebnisse:

Subalternation: $a \leq b, \quad X \;\vdash\; ab \not\leq 0 \qquad$ (bzw. $ba \not\leq 0$)
$\qquad X_{\mathrm{m}}\!: \quad a \not\leq 0 \qquad$ (= X_{s} im Falle ai[26])

Darapti: $a \leq b,\, a \leq c, \quad X \;\vdash\; bc \not\leq 0$
$\qquad X_{\mathrm{m}}\!: \quad a + bc \not\leq 0$

Ersetzt man die beiden Prämissen äquivalent durch $a \leq bc$ und faßt die Lage als einen syllogistischen Fall ai bzw. ao auf, so ergeben sich Lösungen, die relativ zu den Prämissen $a \leq b,\, a \leq c$ jeweils äquivalent zu der (auch schon syllogistischen) Lösung $a \not\leq 0$ sind.

Das Rückschlußproblem in anderen als den hier zugrunde gelegten Kalkülen zu studieren, aber auch sich gegebenenfalls noch konkretere Anwendungsfälle zurechtzulegen, überlassen wir vorerst dem geneigten Leser.

[25] Man könnte sich z.B. fragen, unter welchen Bedingungen die Transitivitätsregel $a \leq b,\, b \leq c \;\vdash\; a \leq c$ umkehrbar ist. Die Antwort besteht in der Minimallösung des Rückschlußproblems: $a \leq c,\, X \;\vdash\; a \leq b,\, b \leq c$.
[26] Vgl. [3, S. 142], [4, S. 108].

Literatur

[1] FREYTAG LÖRINGHOFF, BRUNO BARON VON: *Über das hypothetische Urteil und das Problem des Rückschlusses auf seine Prämissen.* Zeitschrift für philosophische Forschung, 9(1):56–76, 1955.

[2] FREYTAG LÖRINGHOFF, BRUNO BARON VON: *Neues zum Rückschlußproblem. Eine Erwiderung.* Zeitschrift für philosophische Forschung, 12(2):253–262, 1958.

[3] FREYTAG LÖRINGHOFF, BRUNO BARON VON: *Logik I. Das System der reinen Logik und ihr Verhältnis zur Logistik.* Verlag Kohlhammer, Stuttgart, 5. Auflage, 1972.

[4] FREYTAG LÖRINGHOFF, BRUNO BARON VON: *Logik II. Definitionstheorie und Methodologie des Kalkülwechsels.* Verlag Kohlhammer, Stuttgart, 1967.

[5] FREYTAG LÖRINGHOFF, BRUNO BARON VON: *Neues System der Logik. Symbolisch-symmetrische Rekonstruktion und operative Anwendung des aristotelischen Ansatzes.* Verlag Felix Meiner, Hamburg, 1985.

[6] LORENZEN, PAUL: *Algebraische und logistische Untersuchungen über freie Verbände.* Journal of Symbolic Logic, 16:81–106, 1951.

[7] LORENZEN, PAUL: *Formale Logik.* de Gruyter, Berlin, 4. Auflage, 1970.

[8] PETZINGER, JOHANN-MICHAEL VON: *Das Verhältnis von Begriffs- und Urteilslogik. Eine Untersuchung verschiedener Logikkalküle mit einem Exkurs über die Antinomien und den Intuitionismus.* Dissertation, Universität Tübingen, 1975.