Begriffslogik

Johann – Michael v. Petzinger

1985

übertragen und überarbeitet
durch:
Andreas Otte
in Zusammenarbeit mit
J.-M. v. Petzinger

Februar/März 1990

Zusammenfassung

Der von Frege stammenden, seit etwa Russell–Whitehead vorherrschenden „Urteilslogik“ (heute: Aussagen– und Prädikatenlogik) wird als alternativer Ansatz die „Begriffs–Logik“ gegenübergestellt. Letztere kann durch schrittweise Veränderung aus einem verbandstheoretischen Formalismus gewonnen und durch Zusatz eines besonderen „Urteilsprinzips“ zur Urteilslogik ausgebaut werden. Beginnt der Aufbau der Urteilslogik – wie schon der Name nahelegt – mit dem Urteil (der Aussage) und schreitet von dort zum Begriff (Prädikat) fort, so ist die Reihenfolge bei der Begriffslogik umgekehrt; hier werden zuerst Begriffe, dann Urteile behandelt.

Die Möglichkeit, den Unterschied von Beziehungs– und Verknüpfungszeichen kalkülintern zu charakterisieren, führt zu einer syntaktischen Kennzeichnung (noch–)nicht–logischer, begriffslogischer und urteilslogischer Kalküle. Den Abschluß bildet eine Liste von Problemstellungen, die sich aus begriffslogischer Sicht nahelegen.

Da die vorliegende Skizze nur einen ersten Eindruck vom begriffslogischen Ansatz vermitteln und diesen zur Diskussion stellen soll, wurde vieles nicht – wie eigentlich erforderlich – ausführlicher beschrieben und genauer definiert, sondern meist nur knapp (umgangssprachlich) angedeutet, lediglich durch Beispiele erklärt oder als bekannt vorausgesetzt. Ebenso fehlen didaktisch sorgfältigere Hinführungen zu bestimmten Gesichtspunkten, Begriffsbildungen, Axiomen etc., wie auch genauere Quellen– und Literaturangaben. Einiges dazu findet sich in VBU[1].

[1] VBU = J.– M. v. Petzinger: Das Verhältnis von Begriffs- und Urteilslogik. Ein Untersuchung verschiedener Logikkalküle mit einem Exkurs über die Antinomien und den Intuitionismus. Diss. Tübingen 1975

Inhaltsverzeichnis

1 Allgemeines

Im Sinne eines intuitiven Vorverständnisses kann man L o g i k als allgemeine Lehre vom Argumentieren, Begründen, Beweisen, kurz: als Lehre vom S c h l i e ß e n auffassen.
Schlüsse als Gegenstände der Logik bauen sich aus Urteilen (Prämissen, Konklusionen) auf, und diese wiederum bestehen u.a. aus Begriffen. Demnach kann man die Logik grundsätzlich auf mindestens zwei Weisen ansetzen: Als Urteilslogik oder als Begriffslogik, je nach Wahl der Grundelemente. Diese Überlegung führt auf die erste der folgenden

„Drei Säulen der Logik“:

1)	Die „zwei Wege/Zugänge zur Logik“:	Begriffslogik, Urteilslogik
2)	Kalküle (Formale Systeme,Formalismen)	math.
3)	Ordungstheorie, Verbandstheorie	Hilfsmittel

1.1 Zwei Wege zur Logik

Ähnlich wie etwa Arithmetik Beziehungen und Verknüpfungen von Zahlen untersucht, so handelt Urteilslogik von Beziehungen und Verknüpfungen von Urteilen, Begriffslogik dagegen hat es mit Beziehungen und Verknüpfungen von Begriffen zu tun.
Urteilslogik kann jedoch nicht nur Urteile, Begriffslogik nicht nur Begriffe behandeln. Vielmehr treten in der Begriffslogik auch Urteile auf, und zwar in Gestalt spezieller Begriffe, der sog. Beziehungsbegriffe. Analog kennt die Urteilslogik auch Begriffe, und zwar in Form der sog. Satzfunktionen. Die („klassische“) Urteilslogik stützt sich jedoch auf den für Urteile typischen Wahrheitsanspruch bzw. Behauptungscharakter.

In seinem Vortrag „über den Zweck der Begriffsschrift“[2] (man beachte letztere Bezeichnung!) äußert sich Frege hierzu folgendermaßen:

> ...Schröder sagt, mit der booleschen Rechnung mit Begriffen habe meine Begriffsschrift fast nichts gemein; wohl aber mit der booleschen Rechnung mit Urtheilen. In der That, es ist einer der bedeutendsten Unterschiede meiner Auffassungsweise von der booleschen und ich kann wohl hinzufügen von der aristotelischen, daß ich nicht von den Begriffen, sondern von den Urtheilen ausgehe. Damit ist aber keineswegs gesagt, daß ich das Verhältnis der Unterordnung von Begriffen nicht auszudrücken wüßte ...

In seiner Göttinger Dissertation „Grundlagen der kombinatorischen Logik[3]“ schreibt H. B. Curry, nachdem er den im Zusammenhang mit den Antinomien von manchen geforderten Ausschluß „sinnloser“ Begriffe bzw. Gegenstände erörtert hat (S. 516):

> Aber gerade in diesem Ausschließen besteht ein Mangel. Die Aufgabe der Logik ist die Erklärung des Denkens; wenn es von der Erklärung ausgeschlossenes Denken gibt, so ist sie fehlerhaft. Weiterhin sind es genau diese sinnlosen Begriffe, die zu Widersprüchen führen; wenn man sie ausschließt, so kann man wohl die Antinomien vermeiden, aber nie erklären. Das etwas ein Begriff ist, ist das einzige Erfordernis, damit man das Ding in der Logik behandeln könne.
>
> Die Kategorie Begriff – oder, wie ich sie nachher nennen werde, um gewisse Nebenbedeutungen zu vermeiden, Etwas, – ist daher die grundlegende Kategorie der Logik überhaupt. ...
>
> §2. Der Vorrang des Aussagenkalküls. In den heutigen logischen Theorien bildet der sog. Aussagenkalkül den Grundbestandteil. Ich möchte hier die vielleicht triviale Bemerkung darlegen, daß dieser Vorgang[4] nicht notwendig ist.

[2] In: Begriffsschrift und andere Aufsätze. Hrsg. Ignacio Angelelli, Darmstadt, [3]1974; S. 100f bzw. (4)f.
[3] Amer. J. Math., 52 (1930)
[4] Im Text steht tatsächlich zuerst Vorrang, dann Vorgang.

1.2 Kalküle

Kalküle (Formale Systeme, Formalismen) verwendet man zur Darstellung logischer oder anderer (Axiomen)Systeme, wenn man die Folgerungs– bzw. Ableitungszusammenhänge möglichst genau kontrollieren möchte. Kalküle sind Zeichensysteme, innerhalb derer nach bestimmten Regeln operiert, (in einem weiteren Sinne) „gerechnet“ wird (cf. Leibniz: Calculemus!).
Was die „Deutung“ bzw. „Bedeutung“ der Zeichen und Zeichenkombinationen (Ausdrücke, „Wörter“) eines Kalküls angeht, so wollen wir für den Augenblick folgende Position beziehen: Im allgemeinen wird man ein intuitives Vorverständnis eines Gegenstandsbereiches haben, das man mit Hilfe geeigneter Kalküle schärfer zu fassen sucht. Dabei schwebt einem meist eine bevorzugte Deutung der Kalkülausdrücke vor. Kalkül<u>intern</u> ist aber deren „Bedeutung“ lediglich durch die dort geltenden Operationsregeln festgelegt.
Im Falle der Anwendung wird man von der Umgangssprache in den Kalkül und zurück „übersetzen“, den Kalkül oder die eigenen Vorstellungen gegebenenfalls abändern etc. All dies schließt nicht aus, daß dem betreffenden Kalkül („Syntax“) noch eine besondere „Semantik“ zugeordnet wird.

1.3 Ordnungs– und Verbandstheorie

Endlich wird man sich fragen, aus welchen Gebieten der Mathematik sich besonders förderliche Anregungen für die Aufstellung von Logik–Kalkülen beziehen lassen.
Die Beobachtung, daß man Begriffe mittels Art–Gattungs–Beziehung (Dackel sind Hunde, Hunde sind Lebewesen etc.) und Urteile mittels Wenn–dann– Beziehung (quasi– bzw. halb–)ordnen kann, führt unmittelbar in die Ordnungs– und dann weiter in die Verbands–Theorie und damit zur Beantwortung der obigen Frage.

2 Der Kalkül BL

Den grundlegenden Kalkül der Begriffslogik gewinnt man nach einem einfachen Rezept:

Man nehme einen Kalkül, der genau der Struktur „Boolescher Verband“ entspricht und ergänze ihn durch verallgemeinerte Operationen $\prod$ und $\sum$, deren Regeln denjenigen von Infimum und Supremum in Vollständigen (Booleschen) Verbänden nachgebildet sind; dies ergibt den Kalkül VBV. Sodann gestatte man, daß die Variablen dieses Kalküls nicht nur für Terme, sondern auch für beliebige Formeln (siehe Abschnitt 2.1) stehen dürfen; ergibt BL (=Begriffslogik). Weiter füge man eine sog. Deduktions– und Abtrennungsregel hinzu; ergibt $\mathrm{BL}^{\vdash}$.
Der Zusatz des sog. Urteilsprinzips liefert die (volle) Urteilslogik: den Kalkül $\mathrm{BL}^{\vdash}_{\mathrm{u}}$. Dieser entspricht der Aussagen– und Prädikatenlogik (erster Stufe).

Andere Zusätze liefern natürlich andere „Abkömmlinge“ des „Stamm–Kalküls“. Entsprechend ergibt sich eine andere Hierachie, wenn man statt von VBV von einem anderen Kalkül ausgeht (siehe Abb. 1, die Übersicht, sowie insbesondere Abschnitt 2.10 zum Übergang von VBV nach BL die Definition von Beziehungs– und Verknüpfungszeichen).

2.1 Das Vokabular

Es folgt nun zunächst die Beschreibung der sog. „Formalen Sprache“ (des „Vokabulars“, des „Wortschatzes“) für die Kalküle VBV, BL, etc.:

Grundzeichen	a b c ...	Variablen
	A B C ...	
	0 1	Konstanten
	$\leqq$ =	Beziehungszeichen
	$\bar{}$ $\cdot$ + $\prod$ $\sum$	Verknüpfungszeichen

Ausdrücke

Terme

1. Zeichen des Alphabetes (Variablen und Konstanten), die auch (mehrfach) mit Indizes oder Exponenten (aus dem Alphabet) versehen sein dürfen; (sowie Ausdrücke der Gestalt $a(x)$, $b(x, y)$ etc., wobei a, b, x, y Zeichen des Alphabetes sind.)

2. Sind s und t Terme, so auch $s \cdot t$ und $s + t$; ist s ein Term, so auch $\overline{s}$, $\prod_{\mathrm{i}} s$ und $\sum_{\mathrm{i}} s$ (i sei eine Variable).

v-Formeln (=verbandstheoretische Formeln)

Sind s und t Terme, so sind $s \leq t$ und $s = t$ v-Formeln.

l-Formeln (=logische Formeln)

1. wie Terme 1.

2. Sind a und b l-Formeln, so auch $a \leq b$, $a = b$, $a \cdot b$, $a + b$; ist a eine l-Formel, so auch $\overline{a}$, $\prod_{\mathrm{i}} s$ und $\sum_{\mathrm{i}} s$ (i sei eine Variable).

Die eindeutige Lesbarkeit der Ausdrücke wird nötigenfalls durch Setzen von Klammern gewährleistet. Zwecks Anwendung der Kalküle darf die Formale Sprache durch geeignete Zeichen(–Kombinationen) erweitert werden, so daß etwa auch $Hund \leq Tier$, $a \underset{x}{\leq} b$ (als Abkürzung für $ax \leq b$) u.ä. zulässige Ausdrücke wären (cf. Computersprache PROLOG). Wir denken uns in einem solchen Falle die Ausdrucks–Definition entsprechend angepaßt.

2.2 Die Axiome

Es folgen die Axiome (=Grundformeln und Grundregeln) für die Kalküle VBV und BL:
(Ableitbare / beweisbare Formeln und Regeln nennen wir Theoreme bzw. Sätze.)

Grundformeln		Grundregeln			VBV, BL
1	$a \leq a$	5	$\dfrac{a \leq b \quad b \leq c}{a \leq c}$		
2	$a \cdot b \leq a$ $a \cdot b \leq b$	6	$\dfrac{a \leq b \quad b \leq a}{a = b}$	$\dfrac{a = b}{a \leq b}$	$\dfrac{a = b}{b \leq a}$
3	$a \leq a + b$ $b \leq a + b$	7	$\dfrac{a \leq b \quad a \leq c}{a \leq b \cdot c}$		
4	$0 \leq a$ $a \leq 1$	8	$\dfrac{a \leq c \quad b \leq c}{a + b \leq c}$		
		9	$\dfrac{a \leq b}{a \cdot \overline{b} \leq 0}$	$\dfrac{a \cdot b \leq 0}{a \leq \overline{b}}$	
			$\dfrac{a \leq \overline{b}}{a \cdot b \leq 0}$	$\dfrac{a \cdot \overline{b} \leq 0}{a \leq b}$	

2'	$\prod_{i} a_i \leq a_k$	7'	$\dfrac{a \leq b_i}{a \leq \prod_{i} b_i}$ iNFa
3'	$a_k \leq \sum_{i} a_i$	8'	$\dfrac{a_i \leq b}{\sum_{i} a_i \leq b}$ iNFb
2"	$\prod_{x} a(x) \leq a(y)$	7"	$\dfrac{a \leq b(x)}{a \leq \prod_{x} b(x)}$ xNFa
3"	$a(y) \leq \sum_{x} a(x)$	8"	$\dfrac{a(x) \leq b}{\sum_{x} a(x) \leq b}$ xNFb

2.3 Der NF–Kalkül

Es folgt ein Kalkül, der die Bedeutung von „x kommt nicht frei in ... vor“ (xNF...) festlegt:

NF – Kalkül[5]	x, y Variablen;		a, b Ausdrücke
xNF0	$x\mathrm{NF}a$, $x\mathrm{NF}b$	$\vdash$	$x\mathrm{NF}a \leq b$, $x\mathrm{NF}a = b$,
xNF1			$x\mathrm{NF}a \cdot b$, $x\mathrm{NF}ab$, $x\mathrm{NF}a + b$
$x\mathrm{NF}\prod_{x} a$	$x\mathrm{NF}a$	$\vdash$	$x\mathrm{NF}\overline{a}$,
$x\mathrm{NF}\sum_{x} a$			$x\mathrm{NF}\prod_{y} a$, $x\mathrm{NF}\sum_{y} a$

2.4 Bemerkungen zur Axiomatik

1) Die Axiome wurden einerseits möglichst verbandstheoretisch gewählt, andererseits so, daß sich bei begriffslogischer Deutung möglichst einleuchtende umgangssprachliche Formulierungen ergeben: Eine der Negationsregeln wäre etwa zu lesen „Aus 'Kein a ist b bzw. a und b schließen sich aus' ($ab \leq 0$; wegen $c \leq 0 \dashv\vdash c = 0$ auch durch $ab = 0$ ausdrückbar) ergibt sich 'Alle a sind nicht-b' “.
Läßt man eine der vier Negationsregeln (9) weg, so ergibt sich eine schwächere Negation, $\overline{\overline{a}} \leq a$ ist nicht mehr beweisbar.
2) „Bekanntlich“ lassen sich zum Kalkül VBV äquivalente Gleichungskalküle angeben, bei denen dann die Relation $a \leq b$ durch $ab = a$ ausgedrückt werden kann. Man erhielte so etwa einen Kalkül VBA (= Vollständige Boolsche Algebra) oder einen Kalkül VBR (= Vollständiger Boolscher Ring). Bei Aufstellung des letzteren wäre zu überlegen, ob man die verbandstheoretische Operation $\sum$ beibehält oder stattdessen als Verallgemeinerung der Ring–Addition $\oplus$ eine andere Operation $\sum^{\oplus}$ einführt.
3) Greift man aus den Grundregeln und –Formeln von VBV einige heraus, so können Kalküle entstehen, die allgemeineren Strukturen entsprechen, wie etwa Quasi–Ordnung, Halb–Ordnung, Halb–Verband etc.
Auch sind nicht nur Abwandlungen der Negationsregeln von Interesse, sondern auch solche, bei denen etwa die Distributiv–Gesetze nicht mehr gelten (cf. Quanten–Physik) u.ä.

[5] Verändert man das Vokabular des zugrundeliegenden Kalküls, so wird man eventuell auch den NF – Kalkül entsprechend anpassen müssen.
Bei Bedarf kann man noch weitere Relationen der Art NF einführen, etwa „x ist frei für y in a“, „b entsteht aus a durch Ersetzung von x durch t“ u.ä.

4) Die Index–Schreibweise bei $\prod$ und $\sum$ wurde speziell für den Vergleich mit der Prädikatenlogik 1. Stufe gewählt (siehe Abschnitte 3.3 und 4). A_{xy} etwa entspricht dann $A(x,y)$ bzw. Axy etc.

2.5 Terme

Beim verbandstheoretischen Kalkül VBV (= Vollständiger Boolescher Verband) steht

a, b, c	jeweils für einen beliebigen Term ,
a_{i}	für einen Term, der (gegebenenfalls) den variablen Index i frei enthält;
a_{k}	für einen Term, der (gegebenenfalls) den konstanten bzw. variablen Index k frei enthält;
$a(x)$	für einen Term, der (gegebenenfalls) die freie Variable x enthält;
$a(y)$	für einen Term, der (gegebenenfalls) den Term y enthält.

(„gegebenenfalls“ soll jeweils heißen: Index bzw. Variable brauchen in dem betreffenden Ausdruck überhaupt nicht vorkommen, oder sie kommen nur nicht–frei vor, so daß etwa $\prod_{\mathrm{i}} 0 \leq 0$ ein Spezialfall von 2' ist etc.)

Für die logischen Kalküle BL (= Begriffslogik), $\mathrm{BL}^{\vdash}$ etc. gilt dasselbe, wenn man statt „Term“ überall „l–Formel“ sagt.

2.6 Beweise

Zwei Beispiele sollen andeuten, was man unter einem Beweis bzw. einer Ableitung in obigen Kalkülen zu verstehen hat:

$a \leq b, c \leq d \vdash ac \leq bd$

$$\cfrac{\cfrac{\overset{2}{ac \leq a} \quad a \leq b}{ac \leq b}\,5 \qquad \cfrac{\overset{2}{ac \leq c} \quad c \leq d}{ac \leq d}\,5}{ac \leq bd}\,7$$

$a_i \leq b_i \vdash \prod_{\mathrm{i}} a_{\mathrm{i}} \leq \prod_{\mathrm{i}} b_{\mathrm{i}}$

$$\cfrac{\cfrac{\overset{2'}{\prod_i a_i \leq a_i} \quad a_i \leq b_i}{\prod_i a_i \leq b_i}\,5}{\prod_i a_i \leq \prod_i b_i}\,7' \quad i\mathrm{NF} \prod_i a_i$$

Dabei ist „A, B, ... $\vdash K$“ zu lesen als: „Aus den Prämissen/Annahmen A, B, ... ist beweisbar/ableitbar (in dem betreffenden Kalkül) die Konklusion K“, und zwar unter Verwendung von Grundformeln und –Regeln bzw. bereits bewiesenen Formeln und Regeln dieses Kalküls.

A, B	$\vdash C, D$	steht als Abkürzung für die beiden Beweise $A, B \vdash C$ und $A, B \vdash D$, und
A, B $\dashv$	$\vdash C, D$	etwa steht entsprechend für einen Beweis in beiden Richtungen. $\vdash$ A bedeutet: Beweisbar nur aus Grund– oder bereits bewiesenen Formeln.

2.7 Sätze

Wichtige Sätze der Kalküle VBV und BL, auf deren Beweis wir hier verzichten:

1) $ab \leq c \dashv\vdash a \leq \overline{b} + c$
2) $ab \leq c \dashv\vdash a\overline{c} \leq \overline{b}$

3) $(ab \leq 0), (a\bar{b} \leq 0) \ \vdash \ a \leq 0$

2.8 Meta–Kalküle

Die Definitionen der verschiedenen Arten von Kalkül–Ausdrücken lassen sich ihrerseits noch etwas kalkülmäßiger notieren: Man könnte Begriffe wie *Var, Konst, Alph, Term* etc. einführen und die entsprechenden Definitionen regelartig schreiben, z.B.:

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Term}(s), \quad \mathrm{Term}(t) & \vdash & \mathrm{Term}(st), \text{ v–Formel}(s \leq t) \\ \mathrm{Var}(a) & \vdash & \mathrm{Term}(a) \quad \text{etc.} \end{array}$$

Ein Kalkül K bestünde dann u.a. aus drei Teilen:

1) dem „Wort“– oder Ausdrucks–Kalkül. Dieser erzeugt alle Ausdrücke (Terme, Formeln etc.) von K;
2) dem Schluß– oder Beweis–Kalkül, der die in K beweisbaren Formeln und Regeln produziert, sowie
3) einem oder mehreren Hilfskalkülen, wie NF–Kalkül u.a.

Auf den Wortkalkül stützt sich die (Meta–)Beweismethode der Induktion nach der Länge/Komplexität der Ausdrücke, während sich die Methode der Induktion nach der Länge/Komplexität von Beweisen auf den Beweiskalkül bezieht.
Die Prüfung etwa, ob ein bestimmter Ausdruck ein Term ist, wenn gewisse andere Ausdrücke Terme sind o.ä., verliefe dann ähnlich wie z.B. der Nachweis im Schlußkalkül, daß eine bestimmte Formel aus gewissen Annahmen beweisbar ist etc.

Übrigens könnte man die Ausdrucksdefinitionen, die Axiome und den NF–Kalkül klammerreicher formulieren, etwa so:

Sind s und t Terme, so auch $(s)\cdot(t)$, $(s)(t)$, $(s)+(t)$ etc.
Sind a und b l–Formeln, so auch $(a) \leq (b)$ etc.
$(a)(b) \leq b$; $a \leq b$, $a \leq c \ \vdash \ a \leq (b)(c)$ etc.
$x\mathrm{NF}a$, $x\mathrm{NF}b \ \vdash \ x\mathrm{NF}(a) \leq (b), \ldots \ x\mathrm{NF}(a)(b)$ etc.

Für den Alltagsgebrauch wird dann festgelegt, in welcher Reihenfolge bestimmte Zeichen „binden“ bzw. „trennen“ und welche Klammern demnach wegfallen können.

2.9 Syntax und Semantik

Es heißt gelegentlich, die Ausdrücke eines Kalküls („Syntax“) seien bedeutungslos, es müßte ihnen eine Bedeutung erst mit Hilfe einer „Semantik“ oder „Modelltheorie“ zugeordnet werden. In einem einfachen Falle ist die Lage etwa folgende:
Man arbeitet mit drei Systemen S_1, S_2 und S_3. S_1 ist voll oder weitgehend formalisiert: der bedeutungslose, syntaktische Kalkül (K_1). S_2 ist weniger, S_3, der Meta–Kalkül, der als Grundlage zum Vergleich von S_1 und S_2 dient, meist am wenigsten formalisiert.

$$\underbrace{K_1 \qquad S_2}_{S_3}$$

Den als bedeutungslos angenommenen Ausdrücken von K_1 wird nun vermöge einer homomorphen (d.h. in einem bestimmten Sinne Struktur–erhaltenden) Abbildung („Interpretation“) je eine Bedeutung aus dem System S_2 zugeordnet, etwa durch eine Formel der Gestalt $\mathrm{h(A) = B}$ o.ä.
Was aber ist mit den Ausdrücken der Systeme S_2 und S_3?

Besitzen sie – weil gar nicht bzw. weniger formal – „von Natur aus“ gewisse Bedeutung(en) und bedürfen also keiner besonderen Bedeutungszuordnung?
Man könnte nun versuchen, S_2 und S_3 ihrerseits (weitgehend) zu formalisieren. Gesetzt, das sei gelungen, so ergibt sich genau genommen:
Es werden zwei Kalküle K_1 und K_2 auf dem Hintergrund eines Meta–Kalküls K_3 miteinander verglichen.
Letzterer ist meist ziemlich stark, umfaßt Aussagen– und Prädikatenlogik nahezu beliebiger Stufe, Vollständige Induktion, Mengenlehre u.ä.

Ein Beispiel mag dieses illustrieren:
K_1 sei ein (syntaktischer) aussagenlogischer Formalismus; S_2, die zugehörige Semantik, sei gegeben durch den Apparat der „Wahrheitstafeln“ oder die zweielementige Boolesche Algebra über $\{0, 1\}$.
Wir denken uns nun S_2 hinreichend kalkülisiert durch K_2 (etwa einen Gleichungskalkül) und ebenso S_3 durch K_3.
Die bekannten Sätze über die semantische Widerspruchsfreiheit und Vollständigkeit der Aussagenlogik scheinen nun folgende Beweise zu erfordern:

Widerspruchsfreiheit: $\vdash_{K_3}\ (\vdash_{K_1} A \longrightarrow \vdash_{K_2} h(A) = \mathrm{T}\ (\text{bzw. } =1))$

Vollständigkeit: $\vdash_{K_3}\ (\vdash_{K_1} A \longleftarrow \vdash_{K_2} h(A) = \mathrm{T}\ (\text{bzw. } =1))$

Genaugenommen wurden hier lediglich die Kalküle K_1 und K_2 miteinander verglichen und als in einem bestimmten Sinne äquivalent (siehe Abschnitt 4) erwiesen. (Es kann im allgemeinen Fall übrigens auch vorkommen, daß der „Urbild–Kalkül“ schwächer ist als der „Bild–Kalkül“; man spricht dann von Unvollständigkeit.)
Es scheint also nicht zu gelingen, die Zeichenebene, die „Welt der Kalküle“ zu verlassen, um die „Bedeutungen selbst“ zu erreichen. In diesem Zusammenhang könnte man noch fragen, ob der Kalkül K_2 ein reiner Gleichungskalkül sein kann oder ob man nicht Teile der Aussagenlogik, also des Kalküls K_1, wie etwa die Negation u.a. zu seinem Funktionieren benötigt.
Auch wird auf dem Hintergrund der soeben skizzierten Ansicht der gelegentlich behauptete Vorrang der semantischen vor der syntaktischen Darstellung (der Aussagenlogik) zweifelhaft.
Weiterhin ließe sich im Sinne obiger Sichtweise nach der syntaktischen Widerspruchsfreiheit von K_1 und K_2 fragen (also nach der Unmöglichkeit von $\vdash A, \ \vdash \neg A$).
Gesetzt, sie sei bewiesen, dann fragt sich weiter, mit welchen Beweis–Mitteln?
Nach Voraussetzung mit den Mitteln von K_3.
K_3 jedoch ist beträchtlich stärker als etwa K_1, und so hätte man die Widerspruchsfreiheit des schwächeren, also weniger der Widersprüchlichkeit verdächtigen Kalküls mit den Mitteln des stärkeren, also eher verdächtigen bewiesen (cf. auch Gödels Zweiten Satz).
Wie aber beweist man die Widerspruchsfreiheit von K_3 etc. ?
Und was bedeuten all solche Beweise, was zeigen sie „eigentlich“?
In den üblichen Darstellungen sind semantisches (S_2) und Meta–System (S_3) i.a. – soweit ich sehe – halbformal und werden anscheinend als „unbedenklich“ betrachtet.

2.10 Logische– und Nicht–logische Kalküle

Vor dem weiteren Ausbau der Kalküle VBV und BL wollen wir noch der Frage nachgehen, ob man ohne Rückgriff auf irgendeine Deutung rein Kalkül–intern Beziehungszeichen von Verknüpfungszeichen unterscheiden kann.
Hierbei hilft folgende Beobachtung weiter: In einem (halbformalen) arithmetischen Beweis wird man nie Ausdrücke der Gestalt $a + b$, $a \cdot b$ o.ä. allein antreffen, wohl aber solche der Form $a = b$ zum Beispiel.
Andererseits kommen etwa Ausdrücke der Gestalt $a = (b = c)$ überhaupt nicht vor. Dies „legt“ folgende Definition „nahe“:

1) Ein Zeichen B ist (innerhalb eines Kalküls K) ein Beziehungszeichen (Relationszeichen), wenn eine Formel der Gestalt xBy bzw. By (o.ä. bei Suffix–, Superfix–, Circumfix– oder anderer Notation) als selbstständiges Glied eines Beweises im Kalkül K auftreten kann.
2) Ein Zeichen V ist (innerhalb eines Kalküls K) ein Verknüpfungszeichen (Operationszeichen), wenn es in einer Formel der Gestalt xBy bzw. By innerhalb von x oder y auftreten kann, wobei B ein Beziehungszeichen ist. (Klammern, Variablen, Konstanten seien hier ausgeschlossen.)

Der Leser möge nun folgendes nachprüfen:

1) In VBV und BL sind $\leq$ und $=$ Beziehungszeichen im Sinne dieser Definitionen; $\bar{\ }$, $\cdot$, $+$, $\prod$, $\sum$ sind entsprechend Verknüpfungszeichen.
2) Obwohl obige Definitionen den Fall zulassen, daß ein Zeichen sowohl Beziehungs– als auch Verknüpfungszeichen ist, herrscht in VBV eine strenge Trennung: Kein Beziehungszeichen ist Verknüpfungszeichen und umgekehrt.
Für (noch–)nichtlogische Kalküle scheint eine solche Trennung charakteristisch zu sein (cf. die Unterscheidung von v–Formeln und l–Formeln).
3) Beim Kalkül BL dagegen sind $\leq$ und $=$ zugleich auch Verknüpfungszeichen; z.B. ist hier $(a \leq b) \leq (a \leq b)$ beweisbar.
Dies entspricht dem Umstand, daß in der Logik die Beziehung von Grundobjekten wiederum ein Grundobjekt ist, d.h. die Beziehung von Begriffen ist wieder ein Begriff, die Beziehung von Urteilen ist wieder ein Urteil. Dagegen ist z.B. die Beziehung etwa zweier Zahlen keine Zahl.
4) Je mehr man sich der Urteilslogik (Abschnitt 3.3) nähert, desto mehr Verknüpfungszeichen werden zu Beziehungszeichen (z.B. die Negation – im Kalkül BL$^{\vdash}$) bis schließlich alle Verknüpfungszeichen zu Beziehungszeichen geworden sind.

D.h. obige Definition bietet eine Handhabe zur Unterscheidung von (noch–)nichtlogischen und logischen, sowie von begriffs– und urteilslogischen Kalkülen auf rein syntaktischer Ebene.

3 Der Kalkül BL$^{\vdash}$

Ein weiterer Ausbau der Begriffslogik kann nun auf Zusammenhänge führen, wie sie etwa in der folgenden Übersicht (Abb. 1) dargestellt sind. Die Spitzen der durchgezogenen Pfeile zeigen jeweils auf die durch Hinzufügen von Axiomen entstandenen, stärkeren Kalküle. Unterbrochene Linien deuten auf einen eigens zu beweisenden Zusammenhang.
Wir werden im folgenden die einzelnen Kalküle kurz beschreiben und auch einige jeweils charakteristische Sätze angeben.

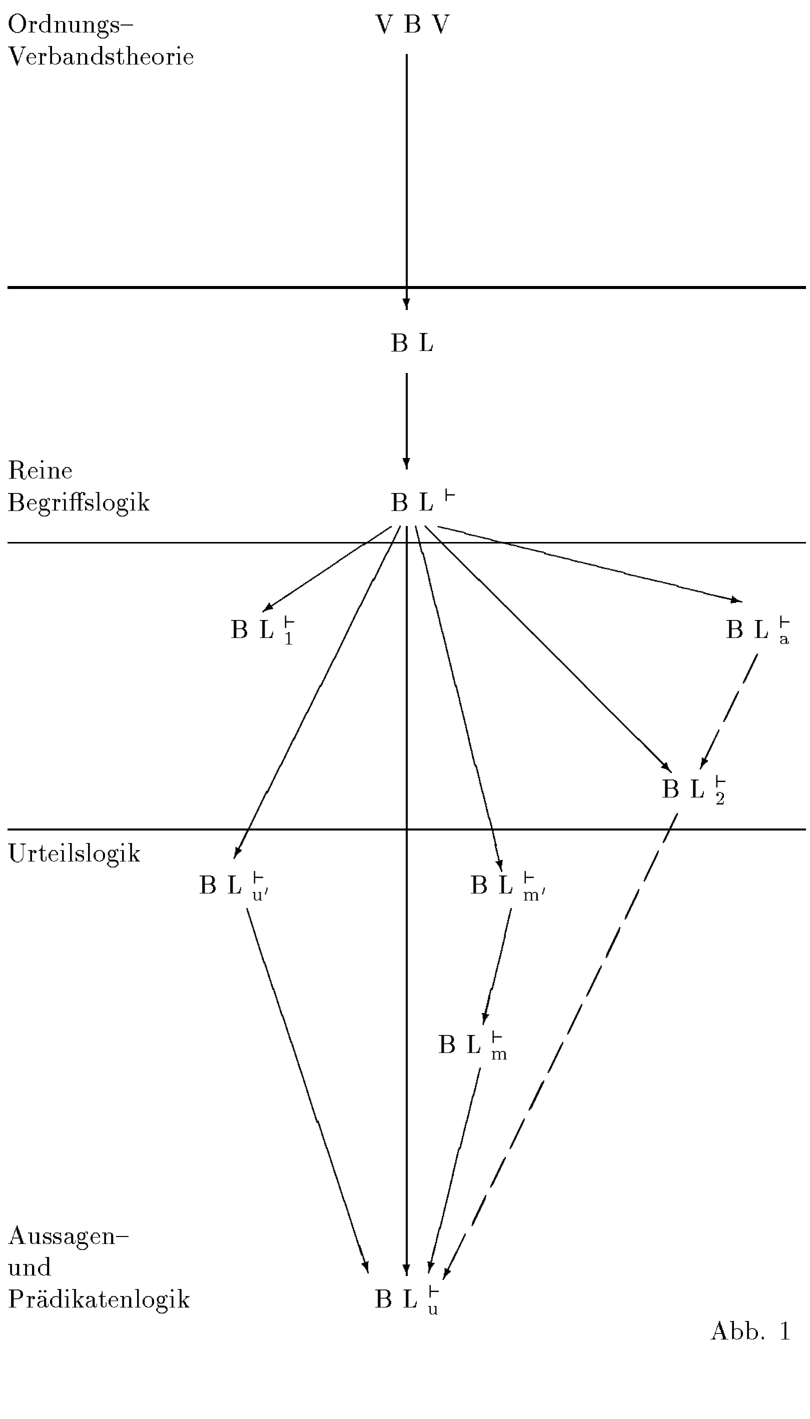
Der bisher gewonnene begriffslogische Kalkül BL zeigt noch einige Schwächen: z.B. kann man die Regel $a \leq b,\ a \nleq c\ \vdash\ b \nleq c$ hier nicht beweisen. Dieser Mangel wird behoben, indem man axiomatisch einen Zusammenhang zwischen der Ableitbarkeitsbeziehung $\vdash$ und der Kalkül–internen Beziehung $\leq$ herstellt: Unter bestimmten Bedingungen soll es zu jedem Beweis

$A, B, \ldots \quad \vdash \quad K$ eine beweisbare Formel

$A \cdot B \cdot \ldots \quad \leq \quad K$ geben und umgekehrt.

Diese Forderung erinnert sehr an die Art und Weise, wie in den Gentzenschen „Kalkülen des natürlichen Schließens“ die Implikation „eingeführt“ wird und ebenso an das aus der Aussagenlogik bekannte sog. „Deduktions–Theorem“.

Es folgen die den neuen Kalkül BL$^{\vdash}$ kennzeichnenden Axiome in zweifacher Darstellung:



Ordnungs–
Verbandstheorie
V B V
B L
Reine
Begriffslogik
B L ⊢
B L ⊢ 1
B L ⊢ a
B L ⊢ 2
Urteilslogik
B L ⊢ u′
B L ⊢ m′
B L ⊢ m
Aussagen–
und
Prädikatenlogik
B L ⊢ u

Abb. 1

$\mathrm{BL}^{\vdash}$ $\quad\vdash$ a Deduktions–Regel

$$\frac{\left(\dfrac{(A_1)\ (A_2)\ \ldots\ (A_n)}{B}\right)}{A_1\cdot A_2\cdot\ldots\cdot A_n\leq B} \qquad\qquad \frac{A_1,A_2,\ldots A_n\vdash B}{A_1\cdot A_2\cdot\ldots\cdot A_n\leq B}$$

$\vdash$ b Abtrennungs–Regel

$$\frac{A_1,A_2,\ldots A_n \quad A_1\cdot A_2\cdot\ldots\cdot A_n\leq B}{B} \qquad\qquad \frac{A_1\cdot A_2\cdot\ldots\cdot A_n\leq B}{A_1,A_2,\ldots A_n\vdash B}$$

$\vdash$ a ist zu lesen als: Ist aus den Annahmen A_1 bis A_n die Formel B abgeleitet, so gewinnt man unter „Beseitigung“ dieser Annahmen (das deutet die Klammerung der A_1 bis A_n an) die nun im Kalkül ableitbare Formel $A_1{\cdot}A_2{\cdot}\ldots{\cdot}A_n \leq B$; oder anders: Aus dem Beweis $A_1, A_2, \ldots A_n \vdash B$ gewinnt man die Formel $A_1{\cdot}A_2{\cdot}\ldots{\cdot}A_n \leq B$.

$\vdash$ b lautet auf Deutsch: Aus A_1, A_2, $\ldots A_n$ sowie $A_1{\cdot}A_2{\cdot}\ldots{\cdot}A_n \leq B$ ist B ableitbar; oder: Aus der Formel $A_1{\cdot}A_2{\cdot}\ldots{\cdot}A_n \leq B$ gewinnt man die Ableitung, den Beweis, die Regel $A_1, A_2, \ldots A_n \vdash B$.

(Hierbei gelte die Einschränkung: Jede der Formeln A_1 bis A_n sowie B sei von der Gestalt $x \leq y$, $x = y$, $x \nleq y$ (für $\overline{x \leq y}$) oder $x \neq y$ (für $\overline{x = y}$).
Diese Einschränkung ist nur nötig, wenn man an der Unterscheidung von Urteils– und Begriffslogik unter dem Gesichtspunkt „Alle Verknüpfungszeichen sind Beziehungszeichen / Nicht alle Verknüpfungszeichen sind Beziehungszeichen“ interessiert ist; siehe Abschnitt 2.10)

3.1 Bemerkungen zur Deduktionsregel

Tritt in einer der Prämissen A_1 bis A_n die Variable (der Index) x frei auf und wurde die Konklusion B unter Verwendung der Variablen–Bedingung xNF… erschlossen, so ist dieses x in der Formel $A_1{\cdot}A_2{\cdot}\ldots{\cdot}A_n \leq B$ durch $\prod_x$ zu „binden“; z.B.:

$$\frac{\left(\dfrac{a_i\leq b}{\sum_i a_i\leq b}\ i\mathrm{NF}b\quad 8'\right)}{\prod_i(a_i\leq b)\leq(\sum_i a_i\leq b}\ \vdash \text{a};\ a_i\leq b \text{ beseitigt}$$

Fordert man für die Anwendung der Deduktionsregel $\vdash$ a, daß Variablen (Indizes) in A_1 bis A_n und B nur nichtfrei auftreten dürfen, dann sind Formeln wie $\prod_i(a_i \leq b) \leq (\sum_i a_i \leq b)$ anscheinend erst in $\mathrm{BL}^{\vdash}_{u'}$ (Abschnitt 3.4) beweisbar.

3.2 Beweise

Wie die neuen Regeln arbeiten, zeigt exemplarisch der folgende Beweis für $a \leq b,\ a \nleq c \ \vdash\ b \nleq c$:

1	$a\leq b,\ b\leq c\ \vdash\ a\leq c$	Grundregel 5
2	$(a\leq b)\cdot(b\leq c)\ \leq\ (a\leq c)$	$\vdash$ a aus 1
3	$(a\leq b)\cdot(a\nleq c)\ \leq\ (b\nleq c)$	nach Satz 1) aus 2
4	$a\leq b,\ a\nleq c\ \vdash\ b\nleq c$	$\vdash$ b aus 3

3.3 Weitere Abkömmlinge

Die weiteren im Diagramm (Abb. 1) vorkommenden „Abkömmlinge“ von $\mathrm{BL}^{\vdash}$ entstehen durch die Zusätze:

$\mathrm{BL}^{\vdash}_{2}$	0/1	$a \nleq 0 \;\dashv\vdash\; 1 \leq a$ (bzw. $a \neq 0 \;\dashv\vdash\; a = 1$)
$\mathrm{BL}^{\vdash}_{\mathrm{m}}$	m	$1 \leq A \;\vdash\; A$
$\mathrm{BL}^{\vdash}_{\mathrm{u}}$	u	$1 \leq A \;\dashv\vdash\; A$
$\mathrm{BL}^{\vdash}_{1}$	s	$\vdash\; 1 \leq 0$

Es soll erinnern

m an modal, weil dieser Kalkül in erster Linie als Modallogik gedeutet werden kann: $1 \leq A$ als „A ist notwendig“ etc.

u an Urteilsprinzip, Urteilslogik: $1 \leq A$ ist hier zu lesen als „A ist wahr“, „A gilt“ o.ä.

s an singulär, da hier mit $1 \leq 0$ alle Begriffe auf einen einzigen sich zusammenziehen.

3.4 Allgemeine Bemerkungen

1) Bei den Kalkülen $\mathrm{BL}^{\vdash}_{\mathrm{m}'}$ und $\mathrm{BL}^{\vdash}_{\mathrm{u}'}$ dürfen die Regeln m bzw. u nur auf Formeln A angewandt werden, die mindestens ein Beziehungszeichen $\leq$ oder $=$ enthalten. Dies eröffnet die Möglichkeit, Terme wie Begriffe im allgemeinen Sinn (also gemäß VBV bis $\mathrm{BL}^{\vdash}$) zu behandeln, Beziehungen jedoch wie echte Urteile (also gemäß $\mathrm{BL}^{\vdash}_{\mathrm{m}}$ bzw. $\mathrm{BL}^{\vdash}_{\mathrm{u}}$).
Zum Beweis etwa des für die Begriffe a, b und x im allgemeinen Sinne zu lesenden Satzes $x\mathrm{NF}(a \leq b) \;\vdash\; \prod_{\mathrm{x}}((x \leq a) \leq (x \leq b)) \;=\; (a \leq b)$ benötigt man das in der beschriebenen Weise eingeschränkte Urteilsprinzip u'.
2) Auch den Kalkül $\mathrm{BL}^{\vdash}_{\mathrm{m}}$ kann man urteilslogisch deuten im Sinne von: $1 \leq A$ bedeute „A ist wahr“ etc. Es gilt dann jedoch nicht: Aus „A ist nicht wahr“ $(1 \nleq A)$ folgt „A ist falsch“ $(A \leq 0)$.
3) Im allgemeinen kann man die Ausdrücke, Axiome, Theoreme etc. eines beliebigen Kalküls im Sinne eines spezielleren, d.h. stärkeren Kalküls deuten. So kann etwa $1 \leq a,\, a \leq b \;\vdash\; 1 \leq b$
   a) verbandstheoretisch als „1 liegt unter a, a liegt unter b, also liegt 1 unter b“,
   b) begriffslogisch als „Alles ist a, alle a sind b, also ist alles b“,
   c) modallogisch als „a ist notwendig; wenn a, dann b; also ist b notwendig“,
   d) urteilslogisch als „a ist wahr; wenn a, dann b; also ist b wahr“ u.ä.

   aufgefaßt werden.
   Die Umkehrung gilt jedoch i.a. nicht: Die urteilslogisch beweisbare Formel $a \leq (b \leq a)$ ergibt z.B. verbandstheoretisch keinen Sinn.
4) Nur am Rande erwähnt sei hier der Kalkül $\mathrm{BL}^{\vdash}_{\mathrm{a}}$ (a wie 'atomar' oder 'Angewandte' im Gegensatz zur sog. 'Reinen' Begriffslogik). Er besitzt ein Axiom, das fordert, es möge unter jedem von 0 verschiedenen Begriff mindestens ein Individual–Begriff liegen. Dabei gilt für jeden Individual–Begriff a^I folgendes:

   I1 $\vdash\; a^I \nleq 0$
   I2 $b \leq a^I,\, b \nleq 0 \;\vdash\; a^I \leq b$

   Kurz: Ein Individual–Begriff ist nicht widersprüchlich (0 heißt auch der widersprüchliche Begriff, wegen $\vdash\; a\overline{a} = 0$ in VBV) und läßt sich nicht weiter in Unterarten aufteilen, spezialisieren. In den Kalkülen VBV bis $\mathrm{BL}^{\vdash}$ braucht es keine Atome / Individual–Begriffe (kurz: Individuen) zu geben.

3.5 Sätze

Es folgt eine kleine Sammlung von nicht notwendigerweise unter dem Gesichtspunkt der „Wichtigkeit“ ausgewählten Sätzen, die aus den zuletzt eingeführten Axiomen beweisbar sind:

$\mathrm{BL}_2^{\vdash}$ 4) $ab \leq 0,\, a \not\leq 0 \;\vdash\; b \leq 0$
5) $ab \not\leq 0 \;\vdash\; a = b$
6) $a \not\leq b \;\vdash\; b \leq a,\, a = \overline{b}$
7) $\vdash\; 1 \leq (a \leq b) + (b \leq a)$
8) $a \not\leq b \;\dashv\vdash\; 1 \leq a,\, b \leq 0$

$\mathrm{BL}_{\mathrm{u}}^{\vdash}$ 9) $\vdash\; (A \leq B) = (\overline{A} + B)$
10) $\vdash\; A + \overline{A}$
11) $AB \leq C \;\dashv\vdash\; A \leq (B \leq C)$
12) $\vdash\; (A \leq B) + (B \leq A)$
13) $A \not\leq 0 \;\dashv\vdash\; 1 \leq A$

Für Individual–Begriffe gilt:

I1) $a^I \not\leq b \;\dashv\vdash\; a^I \leq \overline{b}$
I2) $a^I b \not\leq 0 \;\dashv\vdash\; a^I \leq b$

Satz 8) beleuchtet die Situation, in der eine materiale Implikation falsch ist: Vordersatz wahr, Hintersatz falsch.
Satz 7) bzw. 12) bildet den Hintergrund der sog. „Paradoxien der Materialen Implikation“: Von zwei Aussagen impliziert die eine die andere oder die andere die eine.
Satz 9) drückt eine bekannte Umformung der Implikation aus.
Die Sätze I1) und I2) drücken den Umstand aus, daß bei individuellem Subjekt jeweils universelles und partikuläres Urteil zusammenfallen. Dies könnte man als Auflösung der mittelalterlichen Streitfrage betrachten, ob die singulären Urteile zu den universellen oder zu den partikulären zu rechnen seien.

4 Der Kalkülvergleich

Ähnlich wie Begriffe kann man auch Kalküle miteinander vergleichen. Insbesondere das Verhältnis der Über– und Unterordnung ist von Bedeutung. Es läßt sich u.a. folgendermaßen definieren (wobei wir zunächst den Fall betrachten, daß die beiden Kalküle dasselbe Vokabular besitzen):

Der Kalkül K_1 heißt stärker/spezieller als der Kalkül K_2, wenn

1) alle im Kalkül K_2 beweisbaren <u>Formeln</u> auch in K_1 beweisbar sind, oder:
2) zusätzlich zu 1) auch noch alle in K_2 beweisbaren <u>Regeln</u> in K_1 beweisbar sind, oder:
3) alle Grundformeln und Grundregeln von K_2 in K_1 beweisbar sind, oder:
4) alle Grundformeln von K_2 in K_1 beweisbar und alle Grundregeln von K_2 in K_1 <u>zulässig</u> sind, d.h. von in K_1 beweisbaren Prämissen zu in K_1 beweisbaren Konklusionen führen.

Zwei Kalküle heißen äquivalent/gleichwertig, wenn jeweils der eine stärker als der andere ist.

Unterscheiden sich zwei zu vergleichende Kalküle im Vokabular, so wird eine „Übersetzung“ benötigt, die in einem bestimmten Sinne eindeutig sein muß, um gewisse Entartungsfälle auszuschließen[6], und obige Definitionen müssen sinngemäß geändert werden.

[6] Besitzt ein Ausdruck A zwei verschiedene Übersetzungen B und C, so sollte $\mathrm{B} \dashv\vdash \mathrm{C}$ bzw. $\vdash \mathrm{B} = \mathrm{C}$ o.ä. gelten.

Für den Vergleich etwa des Kalküls $\mathrm{BL}_{\mathrm{u}}^{\vdash}$ (ohne die Axiome 2”, 3”, 7”, 8” sowie mit entsprechend eingeschränktem Vokabular) mit einem Kalkül der Aussagen– und Prädikatenlogik 1. Stufe könnte man wie folgt übersetzen:

$\mathrm{BL}_{\mathrm{u}}^{\vdash}$	$A,\ B,\ \ldots$	A_{x}	$B_{\mathrm{xy}\ldots}$	$A \leq B$	$A = B$	$\overline{A}$	$A\ B$	$A + B$
APL	$A,\ B,\ \ldots$	$A(x)$	$B(x, y, \ldots)$	$A \rightarrow B$	$A \leftrightarrow B$	$\neg A$	$A \wedge B$	$A \vee B$

$\mathrm{BL}_{\mathrm{u}}^{\vdash}$	0	1	$\prod_{\mathrm{x}} A_{\mathrm{x}}$	$\sum_{\mathrm{x}} A_{\mathrm{x}}$
APL	$\neg(A \rightarrow A)$	$A \rightarrow A$	$\bigwedge x\ A(x)$	$\bigvee x\ A(x)$

Wir deuten hier nur an, wie man etwa zeigen könnte, daß $\mathrm{BL}_{\mathrm{u}}^{\vdash}$ stärker ist als APL, und zwar im Sinne obiger Definition 3).
Viele der üblichen APL–Kalküle haben als Axiome für die Quantoren unsere Axiome 2’, 3’, 7’, 8’ in „wörtlicher“ Übersetzung, daher ist diesbezüglich nichts zu zeigen.
Die verbleibenden aussagenlogischen Axiome übersetzt man und beweist sie in $\mathrm{BL}_{\mathrm{u}}^{\vdash}$. Als Beispiel seien zwei Axiome eines nach Lukasiewicz benannten Systems behandelt:

$A, A \rightarrow B \vdash B$ Beweis:

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{A}{1 \leq A}\,u \qquad A \leq B}{1 \leq B}\,5}{B}\,u$$

$A, A \rightarrow (B \rightarrow A)$ Zwei Varianten:

$$\cfrac{\left(\cfrac{\overset{4}{B \leq 1} \qquad \cfrac{A}{1 \leq A}\,u}{B \leq A}\,5\right)}{A \leq (B \leq A)} \vdash \mathrm{a; A\ beseitigt}$$

$$\cfrac{\overset{2}{AB \leq A}}{A \leq (B \leq A)}\ \mathit{Satz}\ 11)$$

Für den Nachweis, daß APL stärker ist als $\mathrm{BL}_{\mathrm{u}}^{\vdash}$ kann man ähnlich verfahren, muß sich jedoch bezüglich der Deduktionsregel an das Deduktionstheorem erinnern.
Die obige Übersetzung wurde auf den Vergleich $\mathrm{BL}_{\mathrm{u}}^{\vdash}$ – APL zugeschnitten. 0 / 1 könnte man auch durch $A \wedge \neg A$, $A \vee \neg A$ o.ä. übersetzen oder – wenn man einen Aussagenkalkül mit entsprechenden Konstanten betrachtet – durch T (= true), F (= false).
Das Urteil „Alle a sind b“ läßt sich – je nach zugrundegelegtem Kalkül – verschieden ausdrücken: In BL bis $\mathrm{BL}_{\mathrm{a}}^{\vdash}$ etwa durch $a \leq b$ bzw. $\prod_{\mathrm{x}}((x \leq a) \leq (x \leq b))$ bzw. $\prod_{\mathrm{x}^I}((x^I \leq a) \leq (x^I \leq b))$. In Kalkülen, die stärker sind als $\mathrm{BL}_{2}^{\vdash}$ (die „zweiwertige“ Begriffslogik) kommt $a \leq b$ nicht in Frage, es bleibt nur: $\prod_{\mathrm{x}}(a_{\mathrm{x}} \leq b_{\mathrm{x}})$ bzw. $\prod_{\mathrm{x}}(A_{\mathrm{x}} \leq B_{\mathrm{x}})$ in Urteilslogiken.
Insofern durch ein $\prod_{\mathrm{x}}$ bzw. $\sum_{\mathrm{x}}$ über Begriffe x (und erst im Spezialfall über Individual–Begriffe) „quantifiziert“ wird, besteht ein Zusammenhang mit Prädikatenlogiken zweiter und höherer Stufe.

5 Eine Übersicht

Die folgende Übersicht (Abb. 2) zeigt noch einmal einige Unterschiede zwischen urteils– und begriffslogischem Aufbau. Bei ersterem besteht der Übergang Urteil – Begriff in einer Erweiterung der Aussagen– zur Prädikatenlogik durch Hinzufügen der Quantoren und entsprechender Axiome. Bei letzterem bewirkt Hinzufügen des Urteilsprinzips den umgekehrten Übergang Begriff – Urteil.
Des weiteren hat man in den heute üblichen Urteilslogiken von Anfang an mehrere Sorten von „Dingen“, während es begriffslogisch nur eine Sorte gibt, nämlich Begriffe, die dann im Spezialfall außer den allgemeinen noch besondere Gesetze befolgen.

6 Andere Kalküldarstellungen

Die bisher erwähnten Kalküle sind alle in einem bestimmten Sinne eindimensional, d.h. ihre Ausdrücke sind Zeichenreihen. Oft ist es aber lehrreich, ein und dasselbe Gebiet auf syntaktisch bzw. graphisch verschiedene Weise, gewissermaßen aus verschiedenen Perspektiven darzustellen. Man denke etwa an Freges „Begriffsschrift“, einen zweidimensionalen Kalkül, im Vergleich mit heutigen Formalismen. „Mehrsprachiges“ Arbeiten im genannten Sinne schützt davor, die Sache selbst mit einer ihrer Darstellungen zu verwechseln, und eröffnet die Möglichkeit, je nach Problemlage die jeweils geeignetere Symbolik einzusetzen, zumal die verschiedenen Darstellungen – wie man sich denken kann und wir gleich ansatzweise sehen werden – ihre je eigenen Vor– und Nachteile haben.

Aufgabe: Es sei der bereits oben (Abschnitt 2.6) angegebene Beweis für die Regel
$a \le b,\, c \le d \;\vdash\; ac \le bd$ zu <u>finden</u>.

6.1 Das Beispiel im Kalkül BL

Hier wird man am besten „rückwärts“ vorgehen und den Term bd in der Konklusion mit Regel 7 „aufspalten“:

$$\frac{a \cdot c \le b \quad a \cdot c \le d}{a \cdot c \le b \cdot d}\, 7$$

Da die so entstandenen Formeln weder Voraussetzungen noch Theoreme sind, muß man fortfahren und wird – wenn man keine bessere „Idee“ hat – versuchsweise jeweils eine Transitivitätsanwendung (Regel 5) ansetzen:

$$\frac{a \cdot c \le \qquad \le b}{a \cdot c \le b}\, 5 \qquad\qquad \frac{a \cdot c \le \qquad \le d}{a \cdot c \le d}\, 5$$

und dann die Zwischenterme geeignet wählen, was schließlich auf den vollständigen Beweis (siehe Abschnitt 2.6) führt.

6.2 Das Beispiel im Freytagschen Kalkül

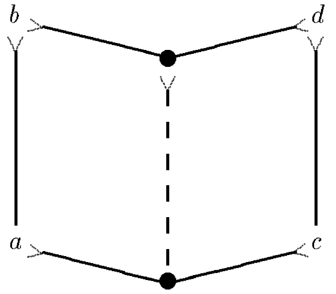
Verwendet man dagegen einen mehrdimensionalen, auf v. Freytag Löringhoff zurückgehenden, stark an die sog. Semantische Netze erinnernden Kalkül, dann sieht obige Regel so aus:

UL	BL

$$\begin{tikzcd}
 & \mathrm{VBV} \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
\mathrm{UL} & & \mathrm{BL}^{\vdash} \arrow[ll]
\end{tikzcd}$$

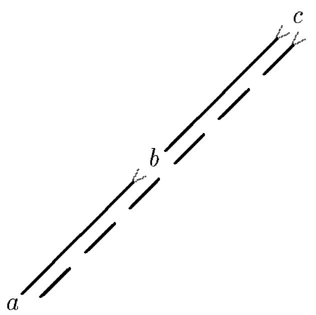
Urteil (Aussage)	Begriff $\quad \mathrm{BL}^{\vdash}$
$\to \ \leftrightarrow \ \neg \ \wedge \ \vee$	$\leq \ = \ - \ \cdot \ + \ \prod_{\mathrm{x}} \ \sum_{\mathrm{x}}$
Begriff (Prädikat)	Urteil $\quad \mathrm{BL}^{\vdash}_{\mathrm{u}}$
$\bigwedge x \ \bigvee x$	
Mehrere Sorten von „Dingen“:	Eine Sorte von „Dingen“:
Urteile (Aussagen)	Begriffe $\quad$ BL
A B C ...	
Prädikate (als Funktionen)	Spezialfälle:
F(x) G(x,y) ...	Beziehungsbegriffe $\quad \mathrm{BL}^{\vdash}$
Individuen	Urteile $\quad \mathrm{BL}^{\vdash}_{\mathrm{u}}$
x y z ...	Individualbegriffe
Behauptungswerte	$I1$, $I2$
T F	

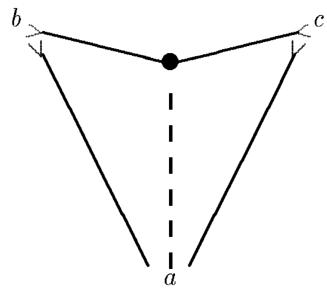
Abb. 2



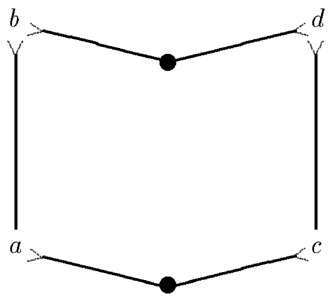
durchgezogen: Prämisse oder Axiom
durchbrochen: Konklusion

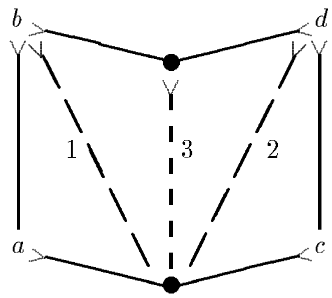
Vorausgesetzt seien unsere Regeln 5 und 7 in „wörtlicher“ Übersetzung (die Grundformeln 2 stecken bereits in der Gestalt des Operationszeichens):





Hier liegt nun nahe (in diesem speziellen Falle; in anderen wird man – bei beiden Kalkülen – auf eine gemischte Rückwärts–Vorwärts–Strategie zurückgreifen), zunächst die Prämissen hinzuzeichnen und dann Schritt für Schritt neue Verbindungen herzustellen, bis sich die gewünschte Konklusion ergibt:



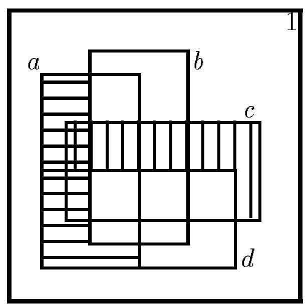


1, 2 nach Regel 5

3 nach Regel 7

6.3 Das Beispiel im Venn–Diagramm

Anders beim Vennschen (Umfangs–) Diagramm: Nach Eintrag der Prämissen braucht man nur noch abzulesen, ob sich die gewünschte Konklusion ergibt (oder nicht), in unserem Falle, ob der zu ac gehörende Bereich ganz in dem zu bd gehörenden enthalten ist. Schraffur bedeutet Leerheit des betreffenden Bereiches.
Aber auch Beweise kann man mit den Angaben erstellen, die ein Venn–Diagramm liefert. Dabei werden auf einem vollkommen algorithmischen Wege von den zum Beweis der Konklusion nötigen Prämissen die unnötigen Teile abgespalten (die Prämissen werden spezialisiert), und die notwendigen Teile zur Konklusion zusammengefügt.



$a \leq b$ $c \leq d$

Für die Konklusion müssen die Felder $a\overline{b}cd$, $a\overline{b}c\overline{d}$, und $abc\overline{d}$ gestrichen (≤ 0) sein, was durch die Prämissen erfüllt ist:

1	$a \leq b$	Prämisse	
2	$c \leq d$	Prämisse	
3	$a\overline{b} \leq 0$	aus 1	nach Regel 9
4	$c\overline{d} \leq 0$	aus 2	nach Regel 9
5	$a\overline{b}cd \leq 0$	aus 3	nach Regel 5 und Formel 2
6	$a\overline{b}c\overline{d} \leq 0$	aus 3	nach Regel 5 und Formel 2
7	$abc\overline{d} \leq 0$	aus 4	nach Regel 5 und Formel 2
8	$a\overline{b}c \leq 0$	aus 5 und 6	nach Satz 3)
9	$ac\overline{d} \leq 0$	aus 6 und 7	nach Satz 3)
10	$ac \leq b$	aus 8	nach Satz 2)
11	$ac \leq d$	aus 9	nach Satz 2)
12	$ac \leq bd$	aus 10 und 11	nach Regel 7

7 Aufgaben und Fragen

Weitere Bemerkungen und Problemstellungen, die sich aus der begriffslogischen Betrachtungsweise ergeben:

1) Welchen Kalkül soll man verwenden?
   Das hängt von der Problemlage ab. Ist man nicht in erster Linie an logischer Analyse interessiert (etwa bei der Untersuchung mathematischer Beweise oder bei der Entwicklung eines (halb–)automatischen Beweisers, der nicht in erster Linie logische Sätze beweisen soll), so wird man i.a. einen möglichst starken Logik–Kalkül verwenden. In allen anderen Fällen der Analyse argumentierender Texte (etwa Mathematik, Recht, Philosophie etc.) empfiehlt es sich, zunächst möglichst schwache Kalküle zu verwenden und diese dann bei Bedarf zu verstärken. So kann man genau angeben, wo verbandstheoretisch, wo begriffslogisch oder sogar urteilslogisch o.ä. geschlossen wurde.
   Aufgabe: Beleuchte die Antinomien (die neueren und die schon in der Antike bzw. Scholastik („insolubilia“) bekannten) begriffslogisch. Der „Lügner“ in der Form „Dieser Satz ist falsch“ z.B. führt auf die Formel $L = (L = 0)$, deren Negation in $\mathrm{BL}_{\mathrm{u}}^{\vdash}$ beweisbar ist.

2) Vergleiche Verbandstheorie und Begriffslogik: Suche verbandstheoretische Lösungen für begriffslogische Probleme, verwende letztere zur Formulierung verbandstheoretischer Begriffsbildungen etc., suche Entsprechungen: *Individual–Begriff, Begriffs–Inhalt, Begriffs–Umfang* z.B. entspricht *Atom, Filter, Ideal* in der Verbandstheorie.

3) Vergleiche die Probleme der mathematischen Grundlagenforschung, der Mathematischen Logik, Modelltheorie, Mengenlehre etc. mit der Begriffslogik: studiere z.B. verbandstheoretisch/begriffslogisch „aufbauende“ Kalküle (nach Art der Gentzenschen Sequenzenkalküle) und beweise entsprechende „Schnitt“–Eliminationssätze („Schnitt“–Regel: eine verallgemeinerte Transitivitätsregel); cf. Punkt 1).

4) Welche Beziehungen bestehen zur Informatik und Linguistik?
   Formale Sprachen; Verhältnis: Logische – grammatische Operationen; Strawsons Problem der Subjekt– und Prädikat–Operationen; die Diskussion über die verschiedenen Bedeutungen von „ist“ (cf. Gipper, Stegmüller). Systematik der logischen Beziehungen und Verknüpfungen führt zur Revision der Kantschen sog. Urteilstafel.

5) Historische Problemstellung: Wer dachte wann wie?
   D.h. bei welchen Autoren finden sich begriffslogische bzw. urteilslogische Betrachtungsweise? Rein oder in Mischform?
   Ähnliche Fragestellungen hat man auch auf anderen Gebieten: Wer vertrat eine Korpuskular–, wer eine Wellentheorie des Lichtes unter den älteren Physikern (Newton, Huygens)? Wer vertrat ein heliozentrisches, wer ein geozentrisches Weltbild (Kopernikus,Ptolemäus)? Mischform: Tycho Brahe.

Wer rechnete in der Frühzeit der Analysis mit unendlich–großen und unendlich–kleinen Zahlen, wer dagegen nur mit finiten Größen bzw. Grenzwerten (etwa im Sinne der Nonstandard– bzw. Standard–Analysis; cf. Lakatos: Beweise und Widerlegungen, Spalt: Vom Mythos der mathematischen Vernunft)? Gab es Mischformen etc.?
In diesem Sinne wären die neueren Werke zur Geschichte der Logik, die m.W. alle die urteilslogische, „moderne“ Position als einzig mögliche betrachten, einer Durchsicht zu unterziehen (etwa Bochenski, Scholz, Lukasiewicz u.a.); es wäre zu prüfen, inwiefern sie nicht vielleicht den Quellen Gewalt antun. Ph. Boehner etwa versucht in seiner Arbeit: Did Occam know of Material Implikation? (Fransiscan Studies?) diese Frage positiv zu beantworten. Die Tatsache jedoch, daß in scholastischen Texten mit Hilfe von verum (1) und falsum (0) argumentiert wird, reicht dafür noch nicht aus; es muß gezeigt werden, daß es sich in dem betreffenden Falle um typisch urteilslogische ($\mathrm{BL}_{\mathrm{u}}^{\vdash}$) und nicht lediglich begriffslogische oder noch allgemeinere Schlußweisen handelt.
Man könnte eine Ahnenreihe sowohl der Begriffslogik als auch der Urteilslogik aufzustellen und im Falle von Mischformen sauber zwischen den jeweiligen Anteilen zu trennen suchen.
Insbesondere Leibniz setzt eindeutig begriffslogisch an. Er scheint den Übergang zur Urteilslogik zu kennen, denn es findet sich bei ihm eine Formel $A = (A \textit{ est vera})$, die dem $\mathrm{BL}_{\mathrm{u}}^{\vdash}$–Theorem $A = (A = 1)$ entspricht (cf. Kauppi: Über die Leibnizsche Logik. Helsinki 1960, S. 169ff). Gelegentlich unterlaufen ihm Fehler, die dann später anscheinend dem begriffslogischen Ansatz angelastet wurden oder der von Leibniz geschätzten inhaltslogischen Deutung von Begriffsbeziehungen und Verknüpfungen (noch Schröder sucht die Unhaltbarkeit einer Inhaltslogik darzutun – Inhalt bzw. Umfang eines Begriffes: Gesamtheit seiner Gattungen bzw. Arten – und Bolzano glaubt Gegenbeispiele gegen die sog. Inhalts–Umfangs–Relation zu haben, d.h. gegen die Behauptung, daß der Begriff mit dem umfassenderen Inhalt den weniger umfassenden Umfang besitzt und umgekehrt; cf. Menne Einführung in die Logik). Leibniz scheint partikuläre und universelle Urteile in zu enger Verwandschaft zu sehen. Dies scheint u.a. zu zwei Fehlern zu führen:
Um aus einem Umfangsdiagramm für „Alle a sind b“ das zugehörige Inhaltsdiagramm zu machen, muß man nur a und b vertauschen. Diese Beobachtung überträgt Leibniz nun auf das partikuläre „Einige a sind b“. Da das Diagramm aber symmetrisch ist, ergibt sich keine Veränderung. Tatsächlich unterscheiden sich jedoch die beiden Diagramme (cf. Generales Inquisitiones, Ed. Schupp, S. 90f), das Inhaltsdiagramm ist jedoch im Gegensatz zum Umfangsdiagramm intuitiv nicht sehr einleuchtend.
Auf der Kalkül–Ebene möchte Leibniz „Einige a sind b“ als universelles Urteil mit eingeschränktem Subjekt auffassen, etwa als $ay \leq b$. Damit kann man zwar schön subalternieren, wegen $a \leq b \vdash ay \leq b$, aber beim Negieren gibt es Schwierigkeiten, es ergeben sich nicht die erwünschten Oppositionen des sog. Urteilsquadrates. Aus dem folgenden in $\mathrm{BL}^{\vdash}$ bzw. $\mathrm{BL}_{\mathrm{u}}^{\vdash}$, geltenden Satz ergibt sich, was alles an der Leibnizschen Formel fehlt:

$$y\mathrm{NF}a, y\mathrm{NF}b \quad \vdash \quad (ab \not\leq 0) = \sum_{\mathrm{y}} ((ay \leq b)\ (ay \not\leq 0))$$

Auch die Kantische Definition analytischer und synthetischer Urteile, die Vorläufer in der Scholastik und bei Leibniz und Wolff hat, sollte einer begriffslogischen Prüfung unterzogen werden.

6) Man studiere Varianten der in Abb. 1 dargestellten Kalkülhierachie: Dazu läßt man irgendwelche Teile von VBV weg, ersetzt sie durch andere o.ä. Stets ergibt sich jedoch der Drei–Schritt: (Noch–)nicht–Logik, Begriffslogik, Urteilslogik (einige der Zusatzaxiome müssen vielleicht in manchen Fällen „sinngemäß“ abgeändert werden).
Insbesondere bieten sich hier als Ausgangspunkt Kalküle an, die dann etwa eine Logik ohne Negation, eine mit intuitionistischer Negation, eine Quantenlogik o.ä. liefern.
Gelegentlich wird auch angenommen, die booleschen Eigenschaften der Negation wie $\overline{\overline{a}} \leq a$, $a + \overline{a} = 1$ u.ä. hingen von der Zweiwertigkeit ab; das ist jedoch nicht der Fall; diese Annahme dürfte urteilslogischer Denkweise entspringen.

7) Vergleiche Modallogiken, Normlogiken u.ä. (die sich meist auf APL stützen und durch Zusatz besonderer Operatoren und zugehöriger Axiome entstehen) sowie Systeme der sog. Strikten Implikation (cf. Lewis, Ackermann) mit obigen Kalkülen VBV, $\mathrm{BL}^{\vdash}$ etc.

Allgemeiner: Leite jeden (?) bekannten Logik–Kalkül in dem Sinne her, daß ein Startkalkül K angegeben wird, der einen mit dem betreffenden Kalkül gleichwertigen Abkömmling besitzt, etwa $K_u^{\vdash}$ o.ä.; cf. Punkt 6). Ist der Klassenkalkül (nach Hilbert–Ackermann: Grundzüge der Theoretischen Logik) äquivalent mit $BL_{u'}^{\vdash}$?

8) Studiere weitere „gemischte" Kalküle (wie etwa $BL_{u'}^{\vdash}$, $BL_{m'}^{\vdash}$), bei denen jeweils verschiedene Sorten von Ausdrücken verschiedenen Kalkülen unterliegen. Kann man zwei ganz beliebige Kalküle „mischen"? Man könnte sich auch grundsätzlich in einem sehr allgemeinen Kalkül aufhalten, jedoch bestimmte Begriffe „höherer Stufe" bzw. „Kategorien" einführen, wie etwa „Begriff", „Urteil", „Individual–Begriff", „Zweiwertig" o.ä., so daß man bezüglich der Beweisbarkeit gewisser Formeln oder Regeln jeweils die entsprechenden „Kategorien" angeben müßte, z.B.

   Urteil(a), Urteil(b) $\vdash\ a \leq (b \leq a)$ oder
   Zweiwertig(a), Zweiwertig(b), $ab \neq 0\ \vdash\ a = b$ etc.

9) Schließe Schröders „Algebra der binären Relative" (Algebra der Logik, Bd. III) an den Kalkül VBV, BL, $BL^{\vdash}$ etc. an (cf. Peirce, Tarski, Dedekinds Kettentheorie).